Esame di Ricerca Operativa del 12/02/18

(Cognome)	**(Nome)**	**(Numero di Matricola)**

Esercizio 1. L'autista di un taxi puo' trasportare al massimo 4 persone richiedendo a ciascuna 2 Euro a km per il viaggio. Fanno richiesta di trasporto 6 persone ($P_1, ..., P_6$) ciascuna delle quali ha un bagaglio il cui peso (in kg) é indicato nella seguente tabella insieme al numero di chilometri (km) che la persona deve percorrere nel suo viaggio:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
Peso bagaglio	7	8	15	16	14	7
km di viaggio	10	7	12	15	20	10

Sapendo che il peso massimo dei bagagli trasportabili dal taxi é 50 kg e che la persona P_2 deve viaggiare necessariamente con la persona P_1, si scriva un problema di programmazione lineare intera per determinare quali persone il tassista deve trasportare per massimizzare il profitto complessivo.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

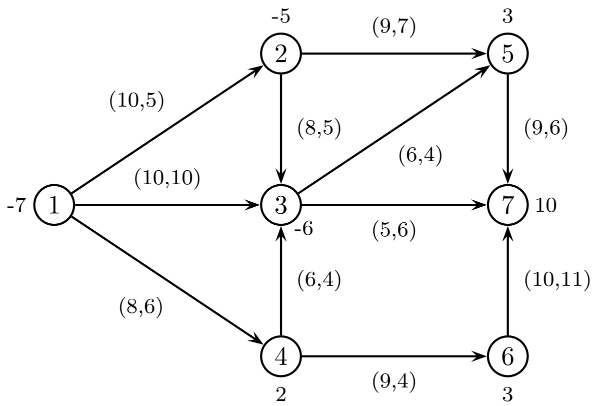
$$\begin{cases} \max\ 8\ x_1 - 9\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \leq 1 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 9 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{5, 6\}$	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,5}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

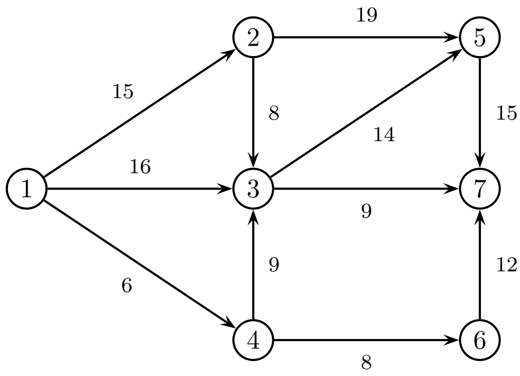


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7)	(2,3)	$x =$		
(1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

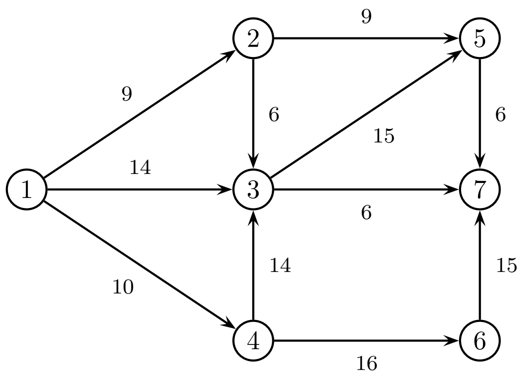
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	
Archi di U	(5,7)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 11\ x_1 + 6\ x_2 \\ 19\ x_1 + 12\ x_2 \leq 60 \\ 8\ x_1 + 17\ x_2 \leq 55 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	29	34	77	57
2		28	104	71
3			23	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24}, x_{45}.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

Variabili decisionali:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se il tassista trasporta la persona } P_i \\ 0, & \text{altriment}i \end{cases} \qquad i = 1, 2, .., 6.$$

Modello:

$$\begin{cases} \max\ (20x_1 + 14x_2 + 24x_3 + 30x_4 + 40x_5 + 20x_6) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 4 \\ 7x_1 + 8x_2 + 15x_3 + 16x_4 + 14x_5 + 7x_6 \leq 50 \\ x_1 = x_2 \\ x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, ..., 6 \end{cases}$$

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

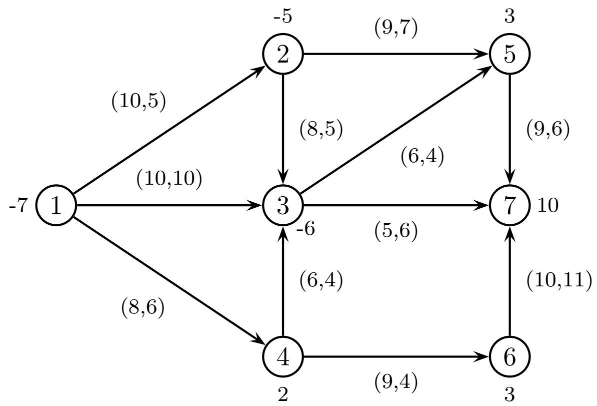
$$\begin{cases} \max\ 8\ x_1 - 9\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \leq 1 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 9 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x = (2,\ -3)$	SI	NO
$\{5, 6\}$	$y = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ -7)$	NO	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{3, 5\}$	$(0,\ 2)$	$\left(0,\ 0,\ -\frac{7}{3},\ 0,\ -\frac{10}{3},\ 0\right)$	3	$\frac{33}{5},\ 3$	4
2° iterazione	$\{4, 5\}$	$(2,\ 3)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -5,\ 0)$	5	$21,\ 7$	2

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

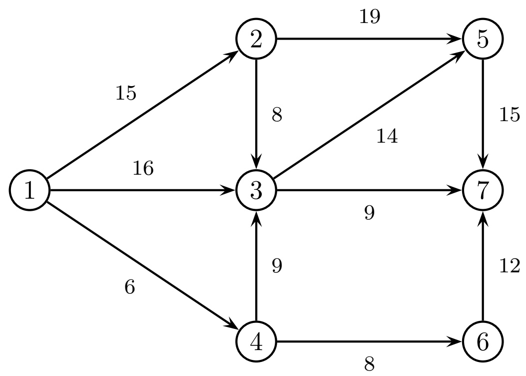


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7)	(2,3)	$x = (0,\ -8,\ 15,\ 5,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 13,\ 0,\ 10)$	NO	SI
(1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,\ 10,\ 23,\ 17,\ 19,\ 18,\ 28)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

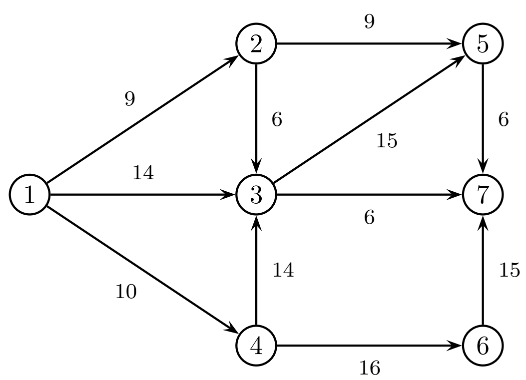
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(5,7)	(5,7)
x	(2, 0, 5, 0, 7, 2, 4, 0, 3, 6, 0)	(0, 2, 5, 0, 5, 4, 4, 0, 3, 6, 0)
π	(0, 10, 13, 8, 19, 17, 18)	(0, 7, 10, 8, 16, 17, 15)
Arco entrante	(1,3)	(5,7)
ϑ^+, ϑ^-	2 , 2	2 , 4
Arco uscente	(1,2)	(3,7)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		6		2		3		7		5	
nodo 2	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 3	16	1	15	4	15	4	15	4	15	4	15	4	15	4
nodo 4	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	34	2	29	3	29	3	29	3
nodo 6	$+\infty$	-1	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	6	26	6	24	3	24	3	24	3
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 3, 7		3, 5, 7		5, 7		5		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0)	6
1 - 2 - 5 - 7	6	(6, 6, 0, 0, 6, 0, 6, 0, 0, 6, 0)	12
1 - 4 - 6 - 7	10	(6, 6, 10, 0, 6, 0, 6, 0, 10, 6, 10)	22

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 11\ x_1 + 6\ x_2 \\ 19\ x_1 + 12\ x_2 \leq 60 \\ 8\ x_1 + 17\ x_2 \leq 55 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{60}{19}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 34$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (3, 0)$ $\qquad v_I(P) = 33$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \leq 3$

$r = 4$ $\qquad 11\, x_1 + 6\, x_2 \leq 34$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	29	34	77	57
2		28	104	71
3			23	26
4				20

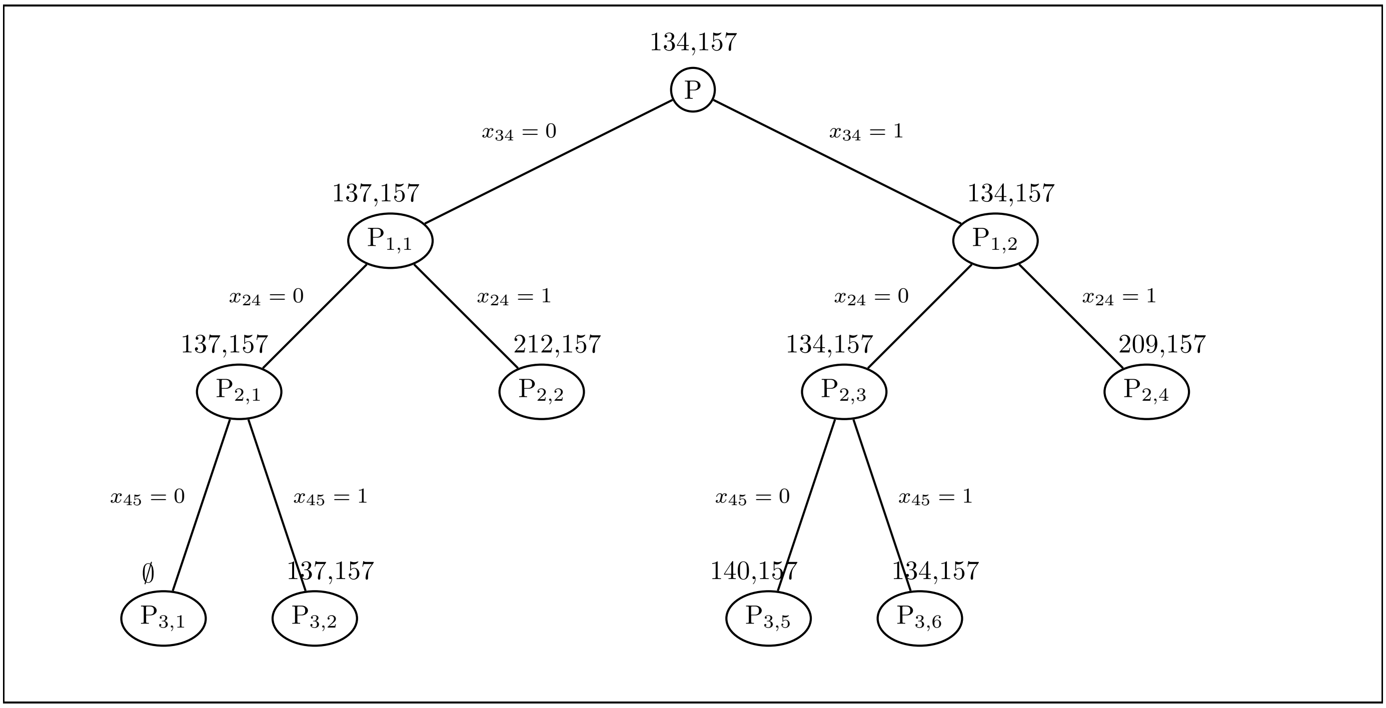
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: (1 , 2) (1 , 3) (2 , 3) (3 , 4) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 134$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: 2 – 3 – 4 – 5 – 1 $\qquad v_S(P) = 157$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24}, x_{45}.


134,157
P
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
137,157
$P_{1,1}$
134,157
$P_{1,2}$
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
137,157
$P_{2,1}$
212,157
$P_{2,2}$
134,157
$P_{2,3}$
209,157
$P_{2,4}$
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
$\emptyset$
$P_{3,1}$
137,157
$P_{3,2}$
140,157
$P_{3,5}$
134,157
$P_{3,6}$