Esame di Ricerca Operativa del 09/06/15

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 23\ y_1 + 2\ y_2 + 16\ y_3 + 10\ y_4 + y_5 + 17\ y_6 \\ 5\ y_1 - y_2 + 2\ y_3 - y_4 - 4\ y_5 - 2\ y_6 = -1 \\ -y_1 - 2\ y_2 + 3\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + 2\ y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{1, 4}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{3,6}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Un albergo deve garantire il servizio di portineria 24/24 ore al giorno. Ogni lavoratore lavora 8 ore consecutive ogni 24 ore. Il numero minimo di personale in ogni fascia oraria é dato dalla seguente tabella:

Fascia oraria	Numero minimo	Fascia oraria	Numero minimo
2-6	4	14-18	7
6-10	8	18-22	12
10-14	10	22-2	4

Formulare un modello che trovi il numero minimo di persone necesssarie ad espletare il servizio

significato variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB

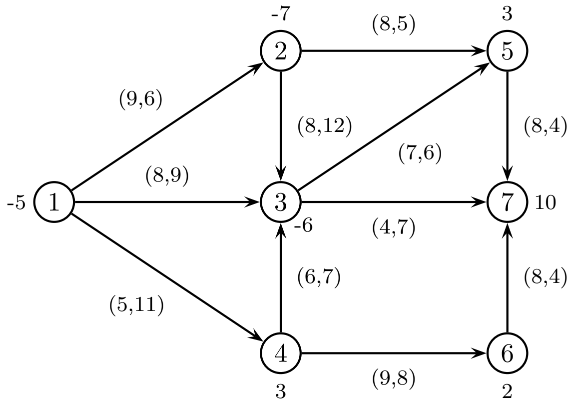
```
c=                    intcon=

A=                    b=

Aeq=                  beq=

lb=                   ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

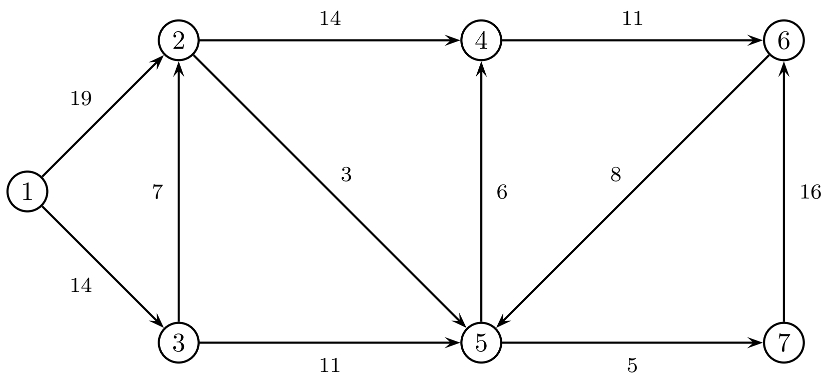


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(2,3)	$x =$		
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6)	(4,3)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

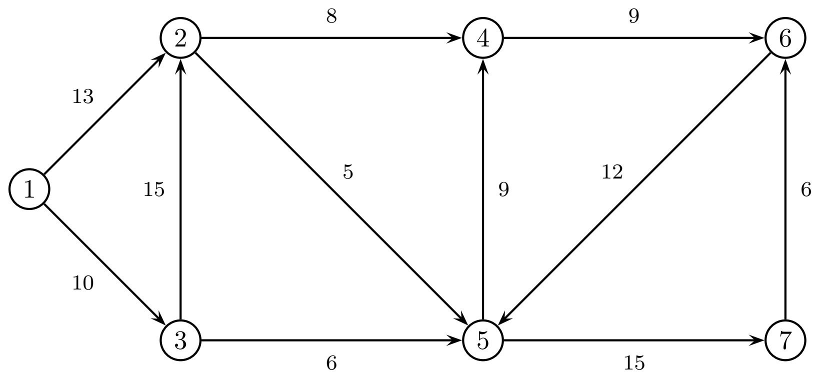
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,3) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 7\ x_1 + 12\ x_2 \\ 15\ x_1 + 12\ x_2 \geq 50 \\ 14\ x_1 + 17\ x_2 \geq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	41	62	92
2		27	54	56
3			11	13
4				94

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{35}, x_{15}. Dire se l'algoritmo é terminato.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 36 \leq 0, \quad 1 - x_1x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ_1	λ_2	globale	locale	globale	locale	
$(-1,\ -1)$							
$(1,\ 1)$							
$\left(3+\sqrt{8},\ 3-\sqrt{8}\right)$							
$\left(3-\sqrt{8},\ 3+\sqrt{8}\right)$							
$\left(-3+\sqrt{8},\ -3-\sqrt{8}\right)$							
$\left(-3-\sqrt{8},\ -3+\sqrt{8}\right)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 2\,x_1^2 + 4\,x_2^2 - 2\,x_1 - 9\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-3, 0)$, $(4, 1)$, $(5, -3)$ e $(-4, -2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 23\ y_1 + 2\ y_2 + 16\ y_3 + 10\ y_4 + y_5 + 17\ y_6 \\ 5\ y_1 - y_2 + 2\ y_3 - y_4 - 4\ y_5 - 2\ y_6 = -1 \\ -y_1 - 2\ y_2 + 3\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + 2\ y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (4,\ -3)$	SI	NO
$\{1,\ 4\}$	$y = \left(-\frac{1}{7},\ 0,\ 0,\ \frac{2}{7},\ 0,\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{3,\ 6\}$	$\left(-\frac{19}{10},\ \frac{33}{5}\right)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$	4	$0,\ \frac{5}{9}$	3
2° iterazione	$\{4,\ 6\}$	$\left(-\frac{31}{4},\ \frac{3}{4}\right)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$	2	$\frac{2}{5}$	6

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

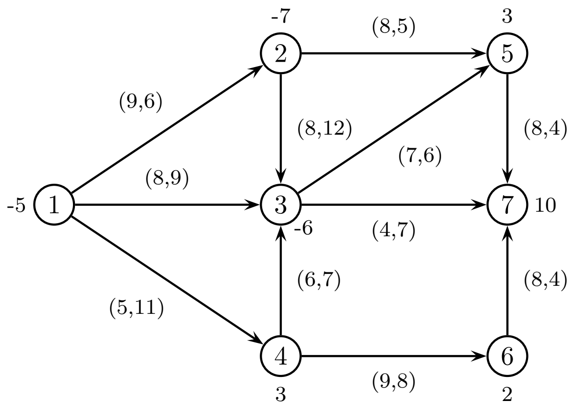
```
c=[1 1 1 1 1 1]          intcon=[1 2 3 4 5 6]

beq=[                    b=[-4;-8;-10;-7;-12;-4]

Aeq=[]                   A=[-10000-1;-1-10000;0-1-1000;00-1-100;000-1-10;0000-1-1]

lb=[0 0 0 0 0 0]         ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

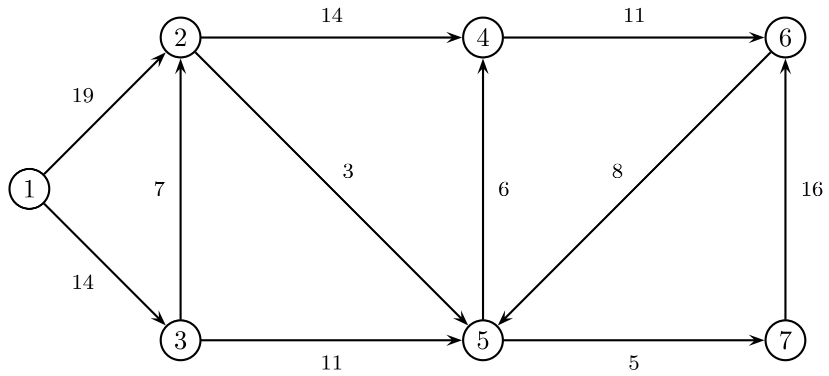


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(2,3)	$x = (0,\ 0,\ 5,\ 12,\ -5,\ 8,\ 10,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0)$	NO	SI
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6)	(4,3)	$\pi = (0,\ 9,\ 8,\ 5,\ 15,\ 14,\ 12)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

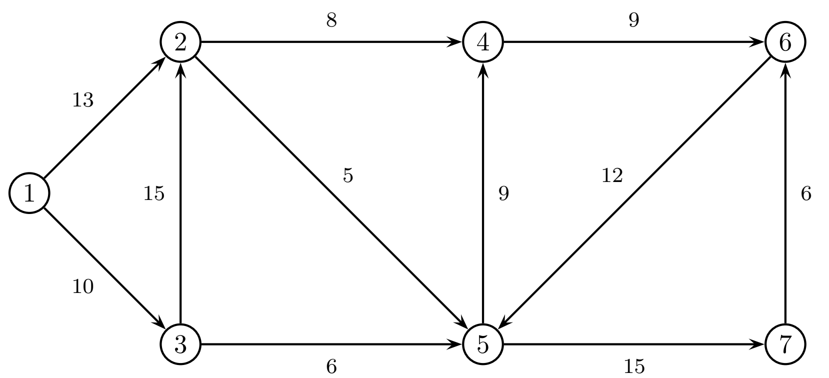
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,3) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,3) (1,4) (2,3) (3,7) (4,6) (5,7)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(0, 0, 5, 7, 0, 6, 7, 0, 2, 3, 0)	(0, 0, 5, 7, 0, 6, 7, 0, 2, 3, 0)
π	(0, 3, 11, 5, 7, 14, 15)	(0, 0, 8, 5, 4, 14, 12)
Arco entrante	(1,3)	(3,5)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 0	0 , 3
Arco uscente	(4,3)	(3,7)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		7		4		6	
nodo 2	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1
nodo 3	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	33	2	28	5	28	5	28	5	28	5
nodo 5	$+\infty$	-1	25	3	22	2	22	2	22	2	22	2	22	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	43	7	39	4	39	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	27	5	27	5	27	5	27	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		4, 6		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	5	(5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0)	5
1 - 3 - 5 - 7	6	(5, 6, 0, 5, 0, 6, 0, 0, 11, 0, 0)	11
1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7	4	(9, 6, 4, 5, 0, 6, 4, 0, 15, 4, 0)	15

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 7\,x_1 + 12\,x_2 \\ 15\,x_1 + 12\,x_2 \geq 50 \\ 14\,x_1 + 17\,x_2 \geq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{59}{14}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 30$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (5, 0)$ $\qquad v_S(P) = 35$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 13\,x_1 + 16\,x_2 \geq 55$

$r = 3$ $\qquad 13\,x_1 + 16\,x_2 \geq 55$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	41	62	92
2		27	54	56
3			11	13
4				94

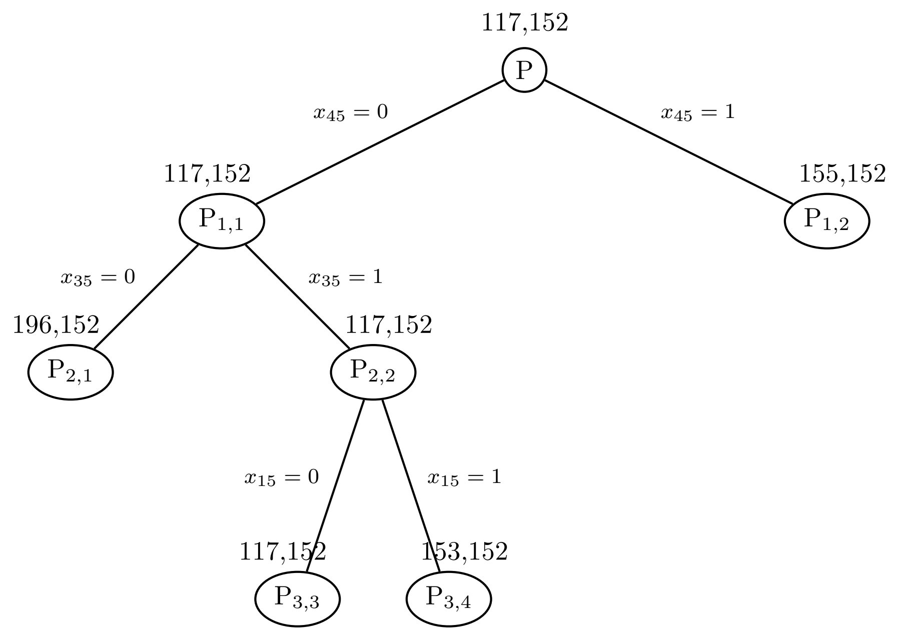
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: (1 , 2) (2 , 3) (2 , 5) (3 , 4) (3 , 5) $\qquad v_I(P) = 117$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: $4 - 3 - 5 - 2 - 1$ $\qquad v_S(P) = 152$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{35}, x_{15}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 36 \leq 0, \quad 1 - x_1x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ_1	λ_2	globale	locale	globale	locale	
$(-1,\ -1)$	0	-1	NO	SI	NO	NO	NO
$(1,\ 1)$	0	1	NO	NO	NO	SI	NO
$\left(3+\sqrt{8},\ 3-\sqrt{8}\right)$	-1/12	0	SI	SI	NO	NO	NO
$\left(3-\sqrt{8},\ 3+\sqrt{8}\right)$	-1/12	0	SI	SI	NO	NO	NO
$\left(-3+\sqrt{8},\ -3-\sqrt{8}\right)$	1/12	0	NO	NO	SI	SI	NO
$\left(-3-\sqrt{8},\ -3+\sqrt{8}\right)$	1/12	0	NO	NO	SI	SI	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 2\ x_1^2 + 4\ x_2^2 - 2\ x_1 - 9\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-3, 0)$, $(4, 1)$, $(5, -3)$ e $(-4, -2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$	$(-2, 1)$	$\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$	$\left(\dfrac{44}{5}, \dfrac{88}{5}\right)$	$\dfrac{5}{132}$	$\dfrac{5}{132}$	$(-3, 0)$