Esame di Ricerca Operativa del 08/09/17

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Una dieta giornaliera consiste di tre cibi C_1, C_2 e C_3, che vengono assunti nella quantità complessiva di 600 grammi. I tre cibi contengono proteine, carboidrati e grassi nelle quantità percentuali indicate nella seguente tabella:

	proteine	carboidrati	grassi
C_1	30%	40%	20%
C_2	20%	40%	0
C_3	30%	0	30%

Si vuole che nella dieta vengano assunti giornalmente almeno 100 grammi di proteine, almeno 150 grammi di carboidrati ed almeno 100 grammi di grassi. Si vuole, inoltre, che la quantità di grassi non superi i 200 grammi e che la quantità complessiva dei cibi C_1 e C_2 sia almeno il doppio della quantità di C_3.
Sapendo che il costo per 100 grammi di ciascuno dei cibi C_1, C_2 e C_3, è 0.8, 0.4 e 1.5 euro, rispettivamente, si formuli un problema di programmazione lineare per determinare una dieta giornaliera di minimo costo.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

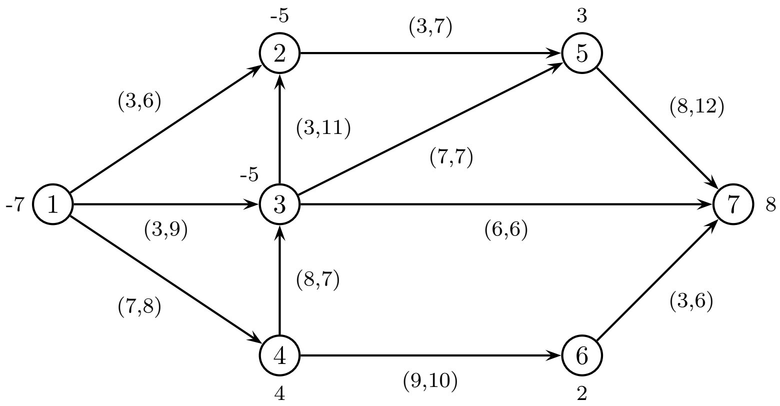
$$\begin{cases} \max\ 6\,x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq -5 \\ -2\,x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ -x_1 \leq -1 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{4, 5\}$	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
iterazione 1	{4,6}					
iterazione 2						

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

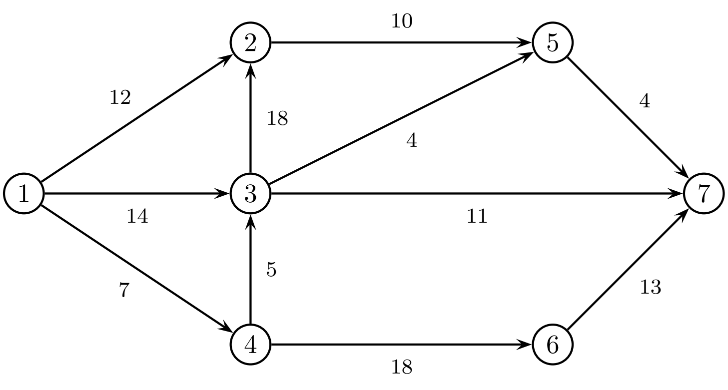


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (3,2) (3,5) (3,7) (4,3) (6,7)	(4,6)	$x =$		
(1,2) (2,5) (3,2) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

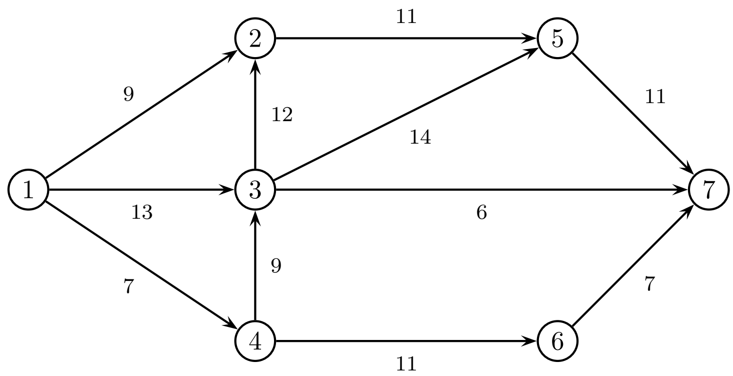
	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (1,4) (3,2) (3,7) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 5\ x_2 \\ 15\ x_1 + 10\ x_2 \geq 44 \\ 9\ x_1 + 17\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		16	9	58
3			98	11
4				97

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{45}, x_{34}.

SOLUZIONI

Esercizio 1.
Variabili decisionali:
x_i = quantitá (in ettogrami) di cibo C_i, $i = 1, 2, 3$, da assumere giornalmente nella dieta;

Modello:

$$\begin{cases} \min\ (0.8x_1 + 0.4x_2 + 1.5x_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \geq 1 \\ 0.4x_1 + 0.4x_2 \geq 1.5 \\ 0.2x_1 + 0.3x_3 \geq 1 \\ 0.2x_1 + 0.3x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 0 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

+

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

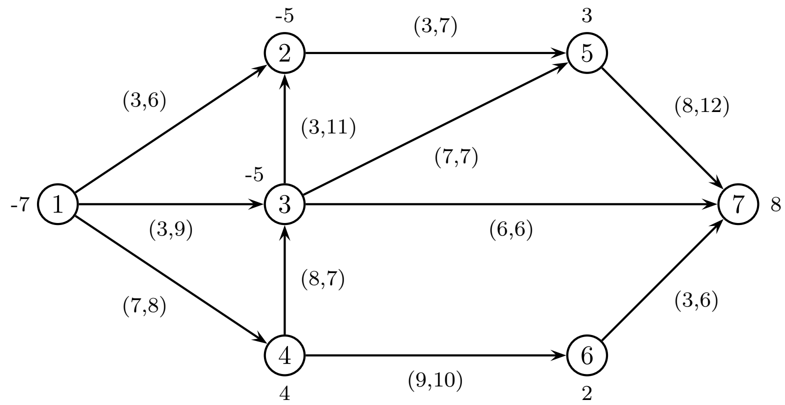
$$\begin{cases} \max\ 6\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ -x_1 \leq -1 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (3,\ -9)$	SI	NO
$\{4,\ 5\}$	$y = \left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{8}{3},\ -\frac{13}{3},\ 0,\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
iterazione 1	$\{4,\ 6\}$	$(3,\ -4)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{5}{3},\ 0,\ -\frac{13}{3},\ 0\right)$	6	$5,\ 3$	3
iterazione 2	$\{3,\ 4\}$	$(5,\ -5)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{13}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	4	$4,\ 12,\ 18$	1

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).

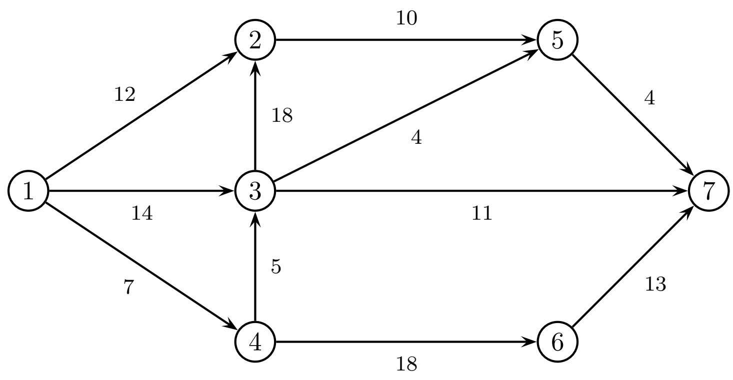


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (3,2) (3,5) (3,7) (4,3) (6,7)	(4,6)	$x = (7,\ 0,\ 0,\ 0,\ -12,\ 3,\ 0,\ -14,\ 10,\ 0,\ 8)$	NO	SI
(1,2) (2,5) (3,2) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,\ 3,\ 0,\ -8,\ 6,\ 11,\ 14)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

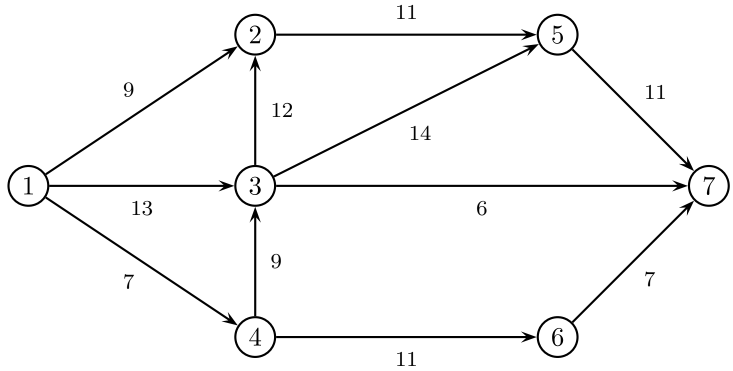
	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (1,4) (3,2) (3,7) (4,6) (5,7)	(1,2) (1,4) (3,2) (3,7) (4,6) (5,7)
Archi di U	(2,5)	(2,5)
x	(0, 1, 6, 7, 2, 0, 4, 0, 2, 4, 0)	(1, 0, 6, 7, 1, 0, 4, 0, 2, 4, 0)
π	(0, 6, 3, 7, 1, 16, 9)	(0, 3, 0, 7, -2, 16, 6)
Arco entrante	(1,2)	(2,5)
ϑ^+, ϑ^-	6 , 1	2 , 1
Arco uscente	(1,3)	(3,2)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1 π	iter 1 p	iter 2 π	iter 2 p	iter 3 π	iter 3 p	iter 4 π	iter 4 p	iter 5 π	iter 5 p	iter 6 π	iter 6 p	iter 7 π	iter 7 p
nodo visitato	1		4		2		3		5		7		6	
nodo 2	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 3	14	1	12	4	12	4	12	4	12	4	12	4	12	4
nodo 4	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	22	2	16	3	16	3	16	3	16	3
nodo 6	$+\infty$	-1	25	4	25	4	25	4	25	4	25	4	25	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	3	20	5	20	5	20	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		3, 5, 6		5, 6, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0)	6
1 - 2 - 5 - 7	9	(9, 6, 0, 9, 0, 0, 6, 0, 0, 9, 0)	15
1 - 3 - 5 - 7	2	(9, 8, 0, 9, 0, 2, 6, 0, 0, 11, 0)	17
1 - 4 - 6 - 7	7	(9, 8, 7, 9, 0, 2, 6, 0, 7, 11, 7)	24

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 5\ x_2 \\ 15\ x_1 + 10\ x_2 \geq 44 \\ 9\ x_1 + 17\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{22}{5}\right)$ $v_I(P) = 22$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 5)$ $v_S(P) = 25$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $14\,x_1 + 9\,x_2 \geq 40$
$r = 4$ $5\,x_1 + 3\,x_2 \geq 14$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		16	9	58
3			98	11
4				97

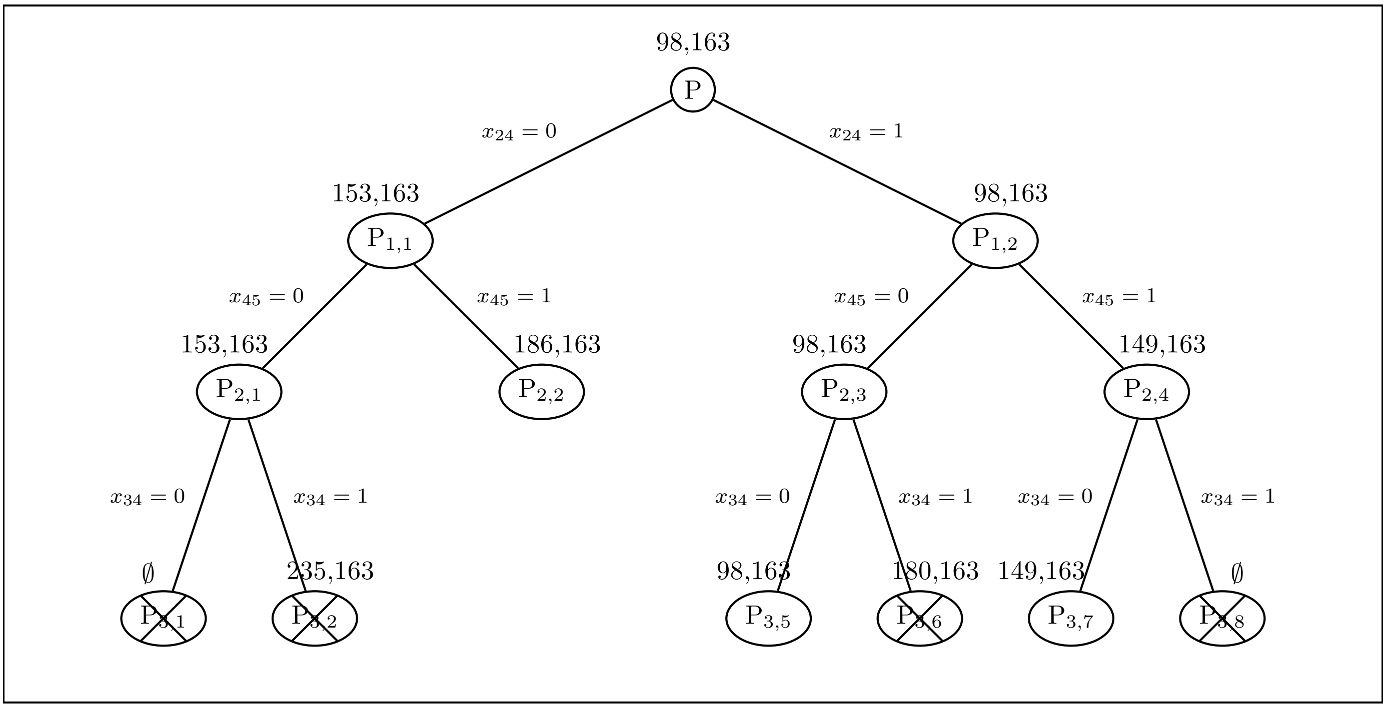
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 2) (1 , 5) (2 , 3) (2 , 4) (3 , 5) $v_I(P) = 98$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $2 - 4 - 1 - 3 - 5$ $v_S(P) = 163$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{45}, x_{34}.



98,163
P
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
153,163
$P_{1,1}$
98,163
$P_{1,2}$
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
153,163
$P_{2,1}$
186,163
$P_{2,2}$
98,163
$P_{2,3}$
149,163
$P_{2,4}$
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
$\emptyset$
$P_{3,1}$
235,163
$P_{3,2}$
98,163
$P_{3,5}$
180,163
$P_{3,6}$
149,163
$P_{3,7}$
$\emptyset$
$P_{3,8}$