Esame di Ricerca Operativa del 6/2/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min \ y_1 + 9\ y_2 + 2\ y_3 + 9\ y_4 + 4\ y_5 + 13\ y_6 \\ -y_1 + 3\ y_2 - 2\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + 2\ y_6 = -2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + 2\ y_5 + 3\ y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{1, 4}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{2,3}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una fabbrica produce 4 tipi di TV ed è divisa in 2 stabilimenti A e B. La fabbrica dispone di 60 operai in A e 40 in B ognuno dei quali lavori 8 ore al giorno per 5 giorni la settimana. In tabella abbiamo: tempo di lavorazione in ore e la richiesta minima di mercato da soddisfare

	1	2	3	4
A	1	1.2	1.5	1.2
B	1.5	0.8	2	0.5
Richiesta	600	400	200	150

Sapendo che il prezzo di vendita è rispettivamente di 400, 600, 1000, e 300 euro per ogni TV, determinare il piano produttivo migliore.

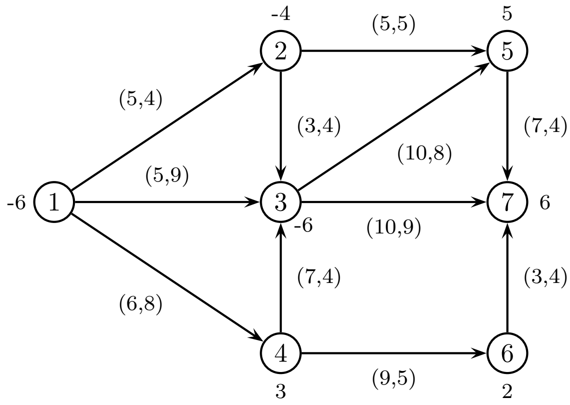
variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

`c=`	`int=`
`A=`	`b=`
`Aeq=`	`beq=`
`lb=`	`ub=`

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	(3,5)	$x =$		
(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,3) (4,6)	(3,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7)	
Archi di U	(5,7)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 14\ x_2 \\ 19\ x_1 + 8\ x_2 \leq 59 \\ 13\ x_1 + 14\ x_2 \leq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

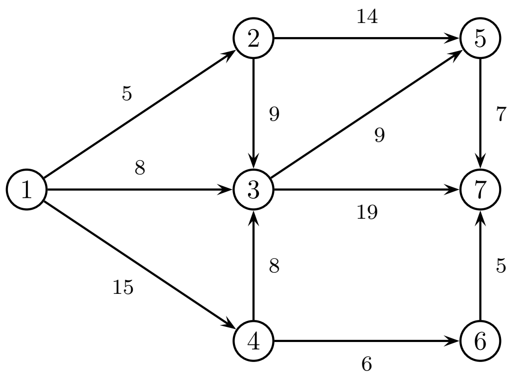
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

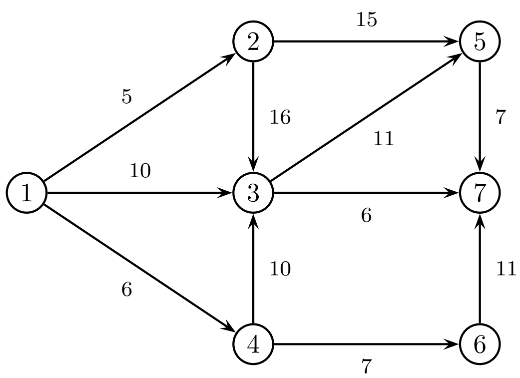
$r =$	taglio:

Esercizio 7. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	19	24	67	47
2		18	94	61
3			13	16
4				10

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando l'1–albero di costo minimo.

1–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando l'1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24}, x_{45}. Dire se l'algoritmo si è concluso.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 + x_2 + 1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$							
$\left(-\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$							
$(0, \ -1)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 2\,x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 - 4\,x_1 + 4\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(1, 4)$, $(-0, -4)$, $(2, -1)$ e $(-5, 0)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{2}{3}, -3\right)$					

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ y_1 + 9\ y_2 + 2\ y_3 + 9\ y_4 + 4\ y_5 + 13\ y_6 \\ -y_1 + 3\ y_2 - 2\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + 2\ y_6 = -2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + 2\ y_5 + 3\ y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (2,\ -3)$	SI	NO
$\{1,\ 4\}$	$y = \left(-\frac{5}{2},\ 0,\ 0,\ -\frac{3}{2},\ 0,\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

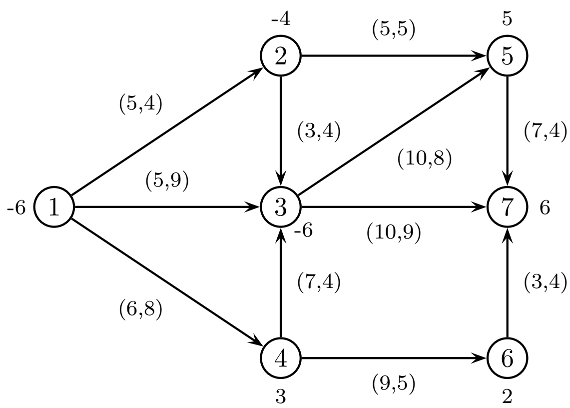
	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{2,\ 3\}$	$(11,\ 24)$	$(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$	4	$0,\ \frac{1}{6}$	2
2° iterazione	$\{3,\ 4\}$	$\left(\frac{7}{5},\ \frac{24}{5}\right)$	$(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$	5	$\frac{5}{7},\ 0$	4

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

```
c=-[ 400 ; 600 ; 1000 ; 300 ; 400 ; 600 ; 1000 ; 300 ]

int=[ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 ]

A=[1 1.2 1.5 1.2 0000;000001.5 0.8 2 0.5;-1000-1000; 0-1000-100;00-1000-10;000-1000-1 ]

b=[ 2400 ; 1600 ; -600 ; -400 ; -200 ; -150 ]

Aeq=[]  beq=[]

lb=[0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 , 0 ; 0 ]  ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

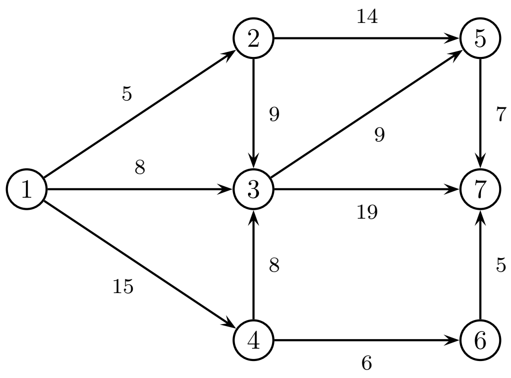


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	(3,5)	$x = (-7,\ 13,\ 0,\ 0,\ -3,\ 8,\ 11,\ 0,\ -3,\ 0,\ -5)$	NO	NO
(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,3) (4,6)	(3,5)	$\pi = (0,\ 5,\ 13,\ 6,\ 10,\ 15,\ 23)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

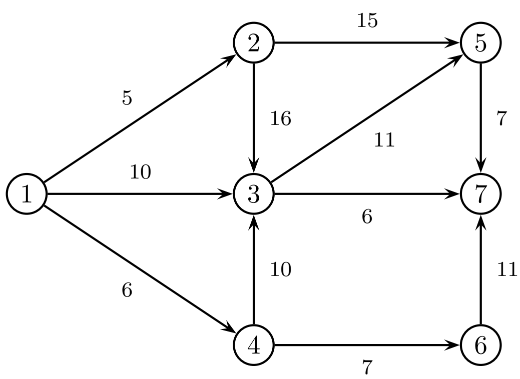
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7)	(1,2) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7)
Archi di U	(5,7)	(2,5) (5,7)
x	(0, 0, 6, 0, 4, 5, 1, 0, 3, 4, 1)	(1, 0, 5, 0, 5, 4, 2, 0, 2, 4, 0)
π	(0, 13, 8, 6, 18, 15, 18)	(0, 5, 8, 6, 18, 15, 18)
Arco entrante	(1,2)	(1,3)
ϑ^+, ϑ^-	1 , 1	7 , 0
Arco uscente	(2,5)	(6,7)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		3		4		5		6		7	
nodo 2	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 3	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 4	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 5	$+\infty$	-1	19	2	17	3	17	3	17	3	17	3	17	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	21	4	21	4	21	4	21	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	27	3	27	3	24	5	24	5	24	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		4, 5, 7		5, 6, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0)	6
1 - 2 - 5 - 7	5	(5, 6, 0, 0, 5, 0, 6, 0, 0, 5, 0)	11
1 - 3 - 5 - 7	2	(5, 8, 0, 0, 5, 2, 6, 0, 0, 7, 0)	13
1 - 4 - 6 - 7	6	(5, 8, 6, 0, 5, 2, 6, 0, 6, 7, 6)	19

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 14\ x_2 \\ 19\ x_1 + 8\ x_2 \le 59 \\ 13\ x_1 + 14\ x_2 \le 41 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{41}{14}\right)$ $\qquad v_S(P) = 41$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 2)$ $\qquad v_I(P) = 28$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad x_2 \le 2$
$r = 3$ $\qquad 5\,x_1 + 6\,x_2 \le 17$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	19	24	67	47
2		18	94	61
3			13	16
4				10

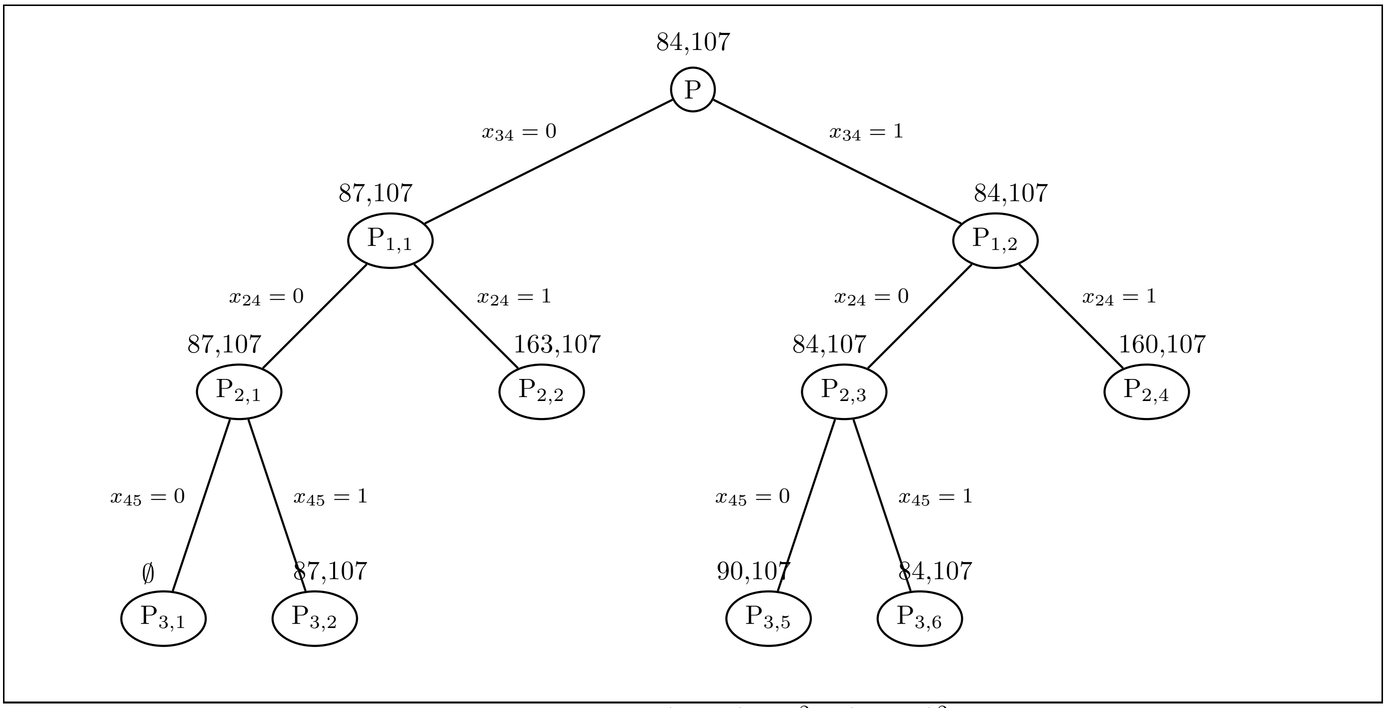
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando l'1–albero di costo minimo.

1–albero: (1 , 2) (1 , 3) (2 , 3) (3 , 4) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 84$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 2 - 3 - 4 - 5$ $\qquad v_S(P) = 107$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando l'1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24}, x_{45}. Dire se l'algoritmo é terminato.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; -x_1^2 + x_2 + 1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$	1		NO	NO	SI	SI	NO
$\left(-\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$	1		NO	NO	SI	SI	NO
$(0,\ -1)$	4		NO	NO	NO	NO	SI

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\ x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 - 4\ x_1 + 4\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(1, 4)$, $(0, -4)$, $(2, -1)$ e $(-5, 0)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{2}{3}, -3\right)$	$-22/3\,x_1 + 16/3\,x_2$	(0 ,-4)	$\left(-\frac{2}{3}, -1\right)$	$\dfrac{1}{10}$	$\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{31}{10}\right)$