Esame di Ricerca Operativa del 06/02/17

(Cognome)	(Nome)	(Numero d Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 7\,x_1 - 6\,x_2 \\ x_1 - x_2 \le 12 \\ -x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 + 2\,x_2 \le -5 \\ 3\,x_1 - x_2 \le 20 \\ -x_1 + x_2 \le -7 \\ -2\,x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 - 2\,x_2 \le 24 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{1, 3\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2,6}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Si vuole definire un piano di lavoro settimanale per svolgere i progetti X, Y e Z, massimizzando le ore (h) dedicate compatibilmente con altri impegni giornalieri. Nella seguente tabella sono indicati (con $*$) i progetti a cui dedicarsi ogni giorno, le ore massime di lavoro giornaliero e le ore minime settimanali da dedicare a ciascun progetto. Scrivere un problema di PL o PLI per determinare le ore di lavoro da dedicare giornalmente a ciascun progetto in modo da massimizzare il numero complessivo di ore settimanali di lavoro.

	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven	h min lavoro (sett.)
A	*		*	*		4
B		*		*	*	5
C	*	*	*		*	6
h max lavoro (giorn.)	6	5	4	7	5	

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

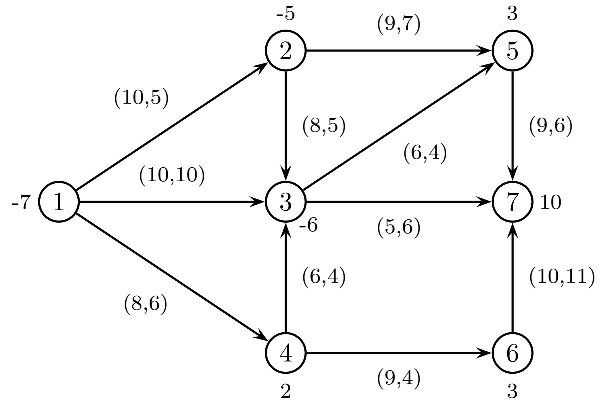
```
c=

A=                                    b=

Aeq=                                  beq=

lb=                                   ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

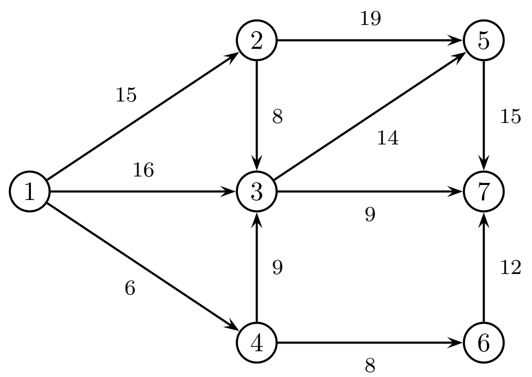


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7)	(2,3)	$x =$		
(1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

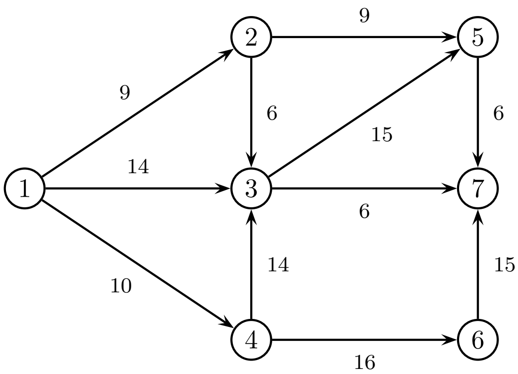
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	
Archi di U	(5,7)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max \ 6\ x_1 + 12\ x_2 \\ 11\ x_1 + 6\ x_2 \leq 63 \\ 7\ x_1 + 17\ x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	15	26	66	47
2		99	58	58
3			12	9
4				15

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{23}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0, \quad -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \ -\frac{1}{2}\right)$							
$\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \ -\frac{1}{2}\right)$							
$(0, \ -2)$							
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \ -\frac{1}{2}\right)$							
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \ -\frac{1}{2}\right)$							
$(0, \ -1)$							
$(0, \ 1)$							
$(0, \ 2)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\, x_1\, x_2 - 4\, x_2^2 + 7\, x_1 + 4\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-2, 5)$, $(1, 3)$, $(-5, 4)$ e $(3, -4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 7\,x_1 - 6\,x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq -5 \\ 3\,x_1 - x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ -2\,x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2\,x_2 \leq 24 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (3,\ -9)$	SI	NO
$\{1,\ 3\}$	$y = \left(\frac{20}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$	SI	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2,\ 6\}$	$(2,\ -8)$	$(0,\ 19,\ 0,\ 0,\ 0,\ -13,\ 0)$	6	$1,\ \frac{3}{2},\ 2$	1
2° iterazione	$\{1,\ 2\}$	$(3,\ -9)$	$\left(\frac{13}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$	2	$\frac{20}{3},\ 2$	4

Esercizio 3.

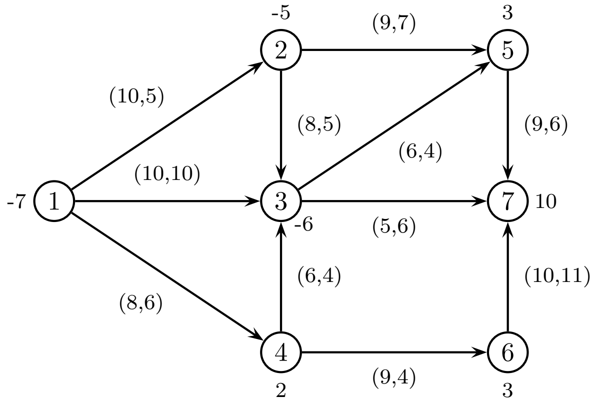
Variabili decisionali:

Indichiamo con $i = 1, 2, 3$ i progetti X, Y e Z rispettivamente e con $j = 1, 2, 3, 4, 5,$ i giorni della settimana dal lunedi al venerdi.
Sia $C = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,5)\}$.
x_{ij} = ore dedicate al progetto i nel giorno j, $(i,j) \in C$;

Modello:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{(i,j)\in C} x_{ij} \\ x_{11} + x_{13} + x_{14} \geq 4 \\ x_{22} + x_{24} + x_{25} \geq 5 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{35} \geq 6 \\ x_{11} + x_{31} \leq 6 \\ x_{22} + x_{32} \leq 5 \\ x_{13} + x_{33} \leq 4 \\ x_{14} + x_{24} \leq 7 \\ x_{25} + x_{35} \leq 5 \\ x_{ij} \geq 0,\ (i,j) \in C \end{cases}$$

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

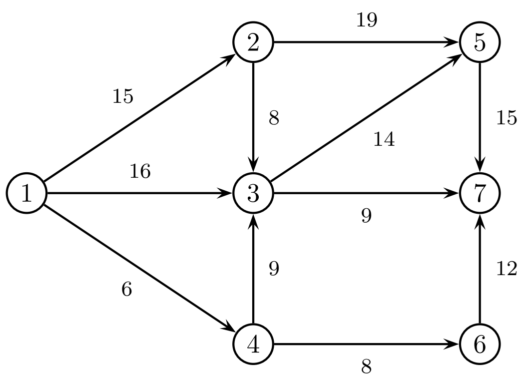


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7)	(2,3)	$x = (0,\ -8,\ 15,\ 5,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 13,\ 0,\ 10)$	NO	SI
(1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,\ 10,\ 23,\ 17,\ 19,\ 18,\ 28)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

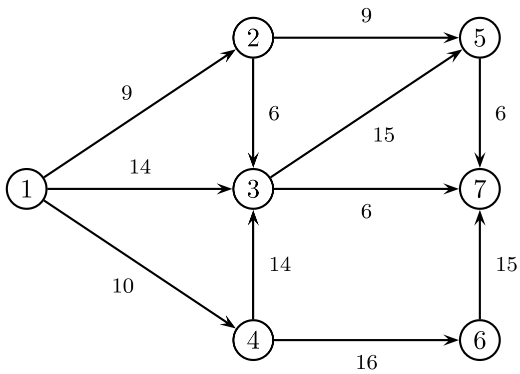
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(5,7)	(5,7)
x	(2, 0, 5, 0, 7, 2, 4, 0, 3, 6, 0)	(0, 2, 5, 0, 5, 4, 4, 0, 3, 6, 0)
π	(0, 10, 13, 8, 19, 17, 18)	(0, 7, 10, 8, 16, 17, 15)
Arco entrante	(1,3)	(5,7)
ϑ^+, ϑ^-	2 , 2	2 , 4
Arco uscente	(1,2)	(3,7)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		6		2		3		7		5	
nodo 2	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 3	16	1	15	4	15	4	15	4	15	4	15	4	15	4
nodo 4	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	34	2	29	3	29	3	29	3
nodo 6	$+\infty$	-1	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	6	26	6	24	3	24	3	24	3
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 3, 7		3, 5, 7		5, 7		5		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0)	6
1 - 2 - 5 - 7	6	(6, 6, 0, 0, 6, 0, 6, 0, 0, 6, 0)	12
1 - 4 - 6 - 7	10	(6, 6, 10, 0, 6, 0, 6, 0, 10, 6, 10)	22

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 6\,x_1 + 12\,x_2 \\ 11\,x_1 + 6\,x_2 \leq 63 \\ 7\,x_1 + 17\,x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{27}{5}, \frac{3}{5}\right)$ $v_S(P) = 39$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (5, 0)$ $v_I(P) = 30$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $8\,x_1 + 17\,x_2 \leq 53$
$r = 2$ $11\,x_1 + 7\,x_2 \leq 63$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	15	26	66	47
2		99	58	58
3			12	9
4				15

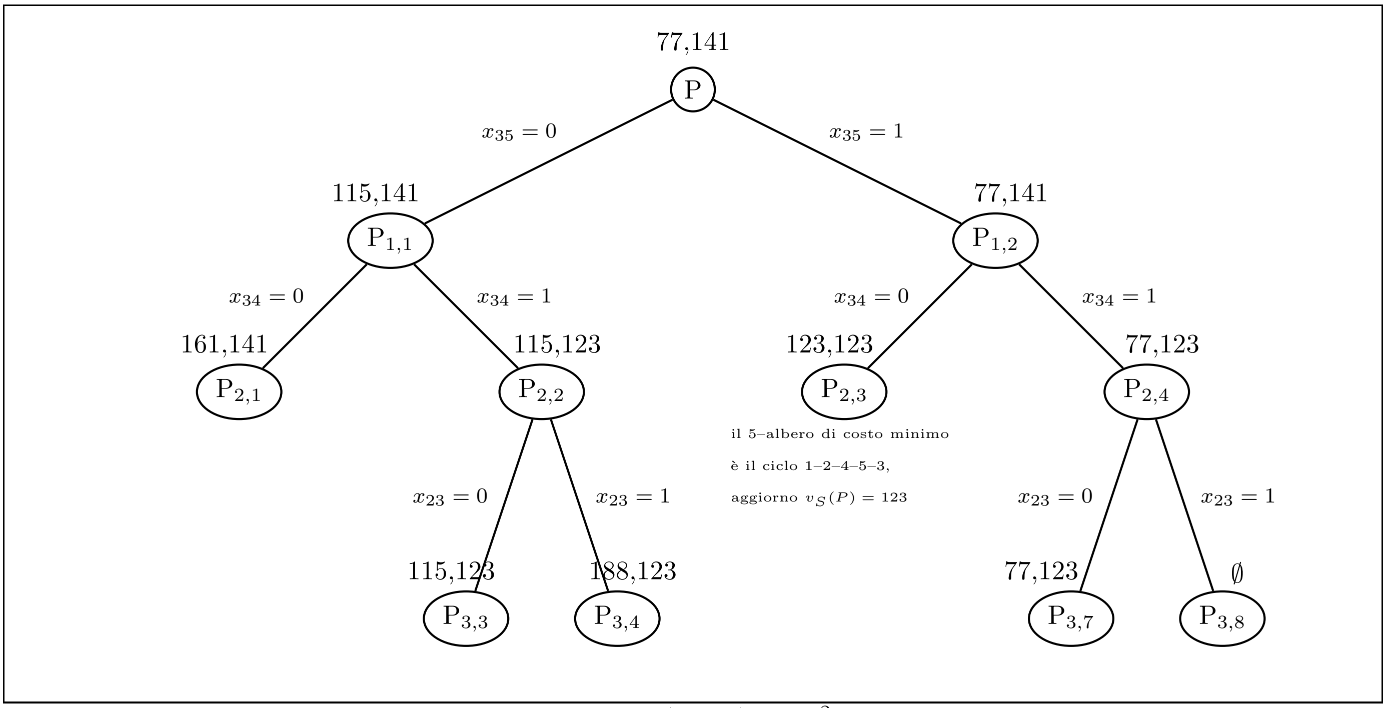
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: (1 , 2) (1 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $v_I(P) = 77$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 2 - 4 - 3 - 5$ $v_S(P) = 141$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{23}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0, \quad -x_1^2 - x_2^2 + 1 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(\frac{\sqrt{15}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$	$(1, 0)$		NO	NO	SI	SI	NO
$\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$	$(1, 0)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(0,\ -2)$	$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$		NO	NO	NO	SI	NO
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$	$(0, -1)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$	$(0, -1)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(0,\ -1)$	$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$		NO	SI	NO	NO	NO
$(0,\ 1)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(0,\ 2)$	$\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\, x_1\, x_2 - 4\, x_2^2 + 7\, x_1 + 4\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-2, 5)$, $(1, 3)$, $(-5, 4)$ e $(3, -4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$	$(-1, -1)$	$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{16}{3}$	$\frac{16}{3}$	$(3, -4)$