Esame di Ricerca Operativa del 06/02/17

(Cognome) **(Nome)** **(Numero d Matricola)**

Esercizio 1. Uno studente vuole definire un piano di studio settimanale per preparare gli esami A, B e C, massimizzando le ore (h) di studio compatibilmente con i suoi impegni giornalieri. Nella seguente tabella sono indicati (con $*$) gli esami a cui lo studente intende dedicarsi ogni giorno, le ore massime di studio giornaliero e le ore minime settimanali che intende dedicare a ciascun esame.

	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven	h min studio (sett.)
A	*		*	*		5
B		*		*	*	5
C	*	*	*		*	4
h max studio (giorn.)	5	6	4	7	4	

Scrivere un problema di programmazione lineare per determinare le ore di studio che lo studente deve dedicare giornalmente a ciascun esame in modo da massimizzare il numero complessivo di ore settimanali di studio.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

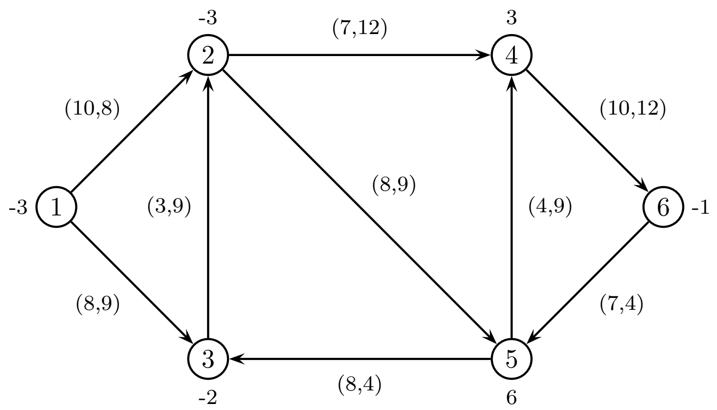
$$\begin{cases} \max\ 7\,x_1 + x_2 \\ x_1 + 2\,x_2 \le -5 \\ 3\,x_1 - x_2 \le 20 \\ -x_1 + x_2 \le -7 \\ x_1 - x_2 \le 12 \\ -2\,x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 - x_2 \le 6 \\ -2\,x_1 \le -1 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{4, 6\}$	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,6}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacit).

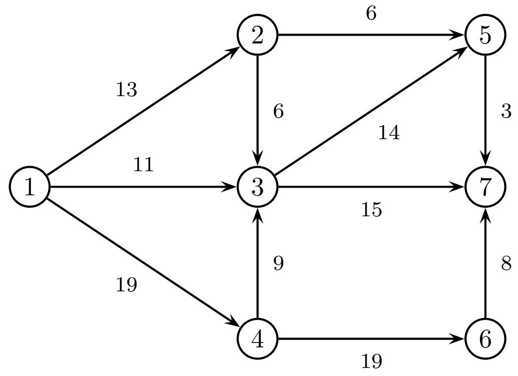


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,4) (3,2) (4,6) (5,4)	(5,3)	$x =$		
(1,3) (2,5) (4,6) (5,3) (5,4)	(3,2)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

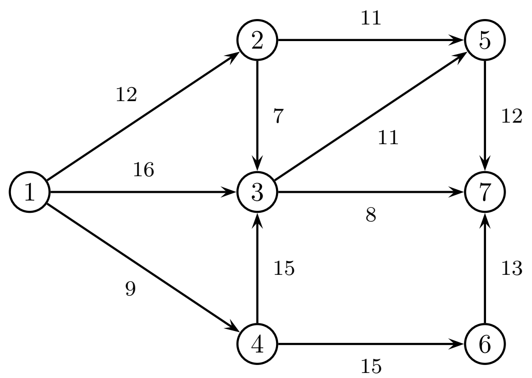
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,4) (2,5) (5,3) (6,5)	
Archi di U	(3,2)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacit minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 13\ x_2 \\ 14\ x_1 + 9\ x_2 \leq 56 \\ 9\ x_1 + 17\ x_2 \leq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 citt, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

citt	**2**	**3**	**4**	**5**
1	15	26	66	47
2		99	58	58
3			12	9
4				15

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo pi vicino a partire dal nodo 2.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{23}.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Variabili decisionali:

Indichiamo con $i = 1, 2, 3$ gli esami A,B,C rispettivamente e con $j = 1, 2, 3, 4, 5$, i giorni della settimana dal lunedi al venerdi.

Sia $C = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,5)\}$.

x_{ij} = ore dedicate alla materia i nel giorno j, $(i,j) \in C$;

Modello:

$$\begin{cases} \max \sum_{(i,j)\in C} x_{ij} \\ x_{11} + x_{13} + x_{14} \geq 5 \\ x_{22} + x_{24} + x_{25} \geq 5 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{35} \geq 4 \\ x_{11} + x_{31} \leq 5 \\ x_{22} + x_{32} \leq 6 \\ x_{13} + x_{33} \leq 4 \\ x_{14} + x_{24} \leq 7 \\ x_{25} + x_{35} \leq 4 \\ x_{ij} \geq 0, \ (i,j) \in C \end{cases}$$

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

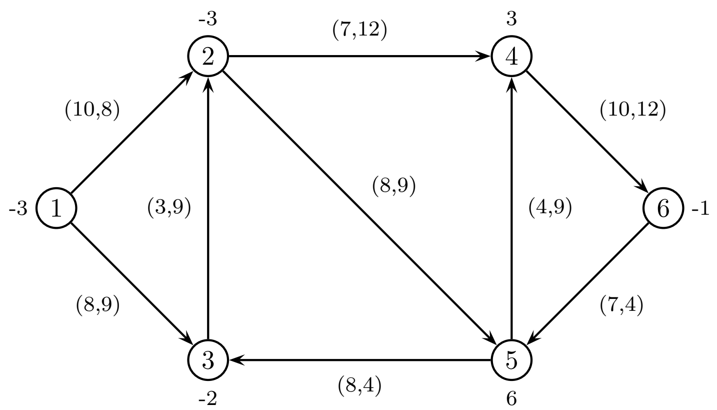
$$\begin{cases} \max \ 7\, x_1 + x_2 \\ x_1 + 2\, x_2 \leq -5 \\ 3\, x_1 - x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -2\, x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -2\, x_1 \leq -1 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (5,\ -5)$	SI	NO
$\{4,\ 6\}$	$y = (0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 0,\ -4,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4,\ 6\}$	$(3,\ -9)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 0,\ -4,\ 0)$	6	$\frac{20}{3},\ 2$	2
2° iterazione	$\{2,\ 4\}$	$(4,\ -8)$	$(0,\ 4,\ 0,\ -5,\ 0,\ 0,\ 0)$	4	$2,\ 5$	1

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacit).

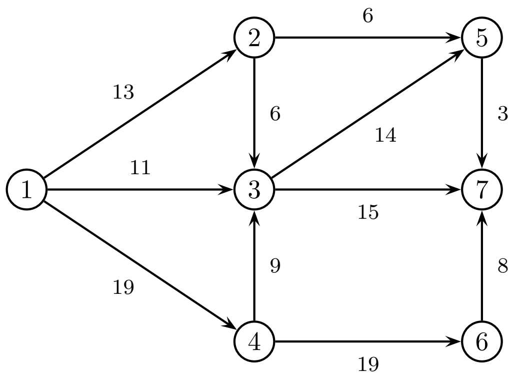


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,4) (3,2) (4,6) (5,4)	(5,3)	$x = (0,\ 3,\ 12,\ 0,\ 9,\ -1,\ 4,\ -10,\ 0)$	NO	SI
(1,3) (2,5) (4,6) (5,3) (5,4)	(3,2)	$\pi = (0,\ -8,\ 8,\ 4,\ 0,\ 14)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

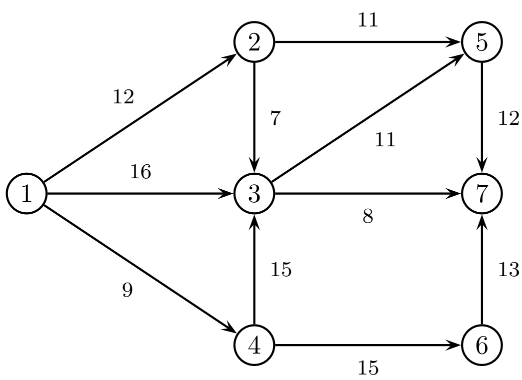
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,4) (2,5) (5,3) (6,5)	(1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (6,5)
Archi di U	(3,2)	
x	(0, 3, 3, 9, 9, 0, 4, 0, 1)	(0, 3, 3, 5, 5, 0, 0, 0, 1)
π	(0, −8, 8, −1, 0, −7)	(0, 11, 8, 18, 19, 12)
Arco entrante	(3,2)	(1,2)
ϑ^+, ϑ^-	$+\infty$, 4	8 , 3
Arco uscente	(5,3)	(1,3)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		4		5		7		6	
nodo 2	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1
nodo 3	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1
nodo 4	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1
nodo 5	$+\infty$	-1	25	3	19	2	19	2	19	2	19	2	19	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	38	4	38	4	38	4	38	4
nodo 7	$+\infty$	-1	26	3	26	3	26	3	22	5	22	5	22	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 5, 7		4, 5, 7		5, 6, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	8	(0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0)	8
1 - 2 - 5 - 7	11	(11, 8, 0, 0, 11, 0, 8, 0, 0, 11, 0)	19
1 - 3 - 5 - 7	1	(11, 9, 0, 0, 11, 1, 8, 0, 0, 12, 0)	20
1 - 4 - 6 - 7	9	(11, 9, 9, 0, 11, 1, 8, 0, 9, 12, 9)	29

Taglio di capacit minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 13\,x_2 \\ 14\,x_1 + 9\,x_2 \leq 56 \\ 9\,x_1 + 17\,x_2 \leq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{59}{17}\right)$ $\quad v_S(P) = 45$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 3)$ $\quad v_I(P) = 39$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\quad x_2 \leq 3$
$r = 3$ $\quad 4\,x_1 + 8\,x_2 \leq 27$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 citt, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

citt	**2**	**3**	**4**	**5**
1	15	26	66	47
2		99	58	58
3			12	9
4				15

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: (1 , 2) (1 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\quad v_I(P) = 77$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo pi vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: 2 – 1 – 3 – 5 – 4 $\quad v_S(P) = 123$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{23}.