Esame di Ricerca Operativa del 06/02/17

(Cognome) **(Nome)** **(Numero d Matricola)**

Esercizio 1. Uno studente vuole definire un piano di studio settimanale per preparare gli esami A, B e C, massimizzando le ore (h) di studio compatibilmente con i suoi impegni giornalieri. Nella seguente tabella sono indicati (con $*$) gli esami a cui lo studente intende dedicarsi ogni giorno, le ore massime di studio giornaliero e le ore minime settimanali che intende dedicare a ciascun esame.

	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven	h min studio (sett.)
A	*		*	*		6
B		*		*	*	5
C	*	*	*		*	4
h max studio (giorn.)	5	6	4	7	5	

Scrivere un problema di programmazione lineare per determinare le ore di studio che lo studente deve dedicare giornalmente a ciascun esame in modo da massimizzare il numero complessivo di ore settimanali di studio.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

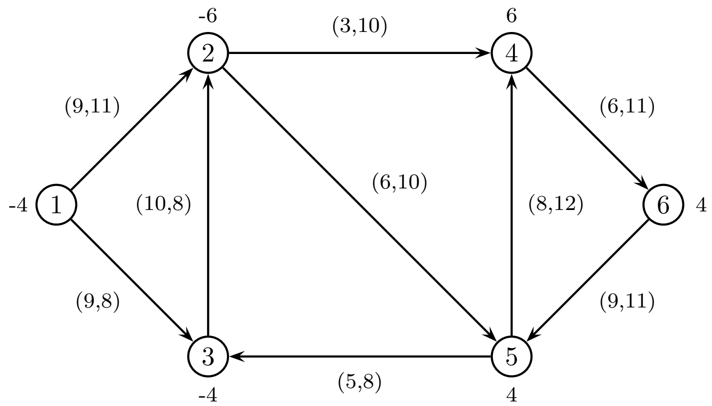
$$
\begin{cases}
\max\ -6\ x_1 + 5\ x_2 \\
-x_1 + x_2 \leq -7 \\
x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\
3\ x_1 - x_2 \leq 20 \\
x_1 - x_2 \leq 12 \\
-2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\
-x_1 - x_2 \leq 6 \\
x_1 - x_2 \leq 13
\end{cases}
$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{3, 4}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,4}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacit).

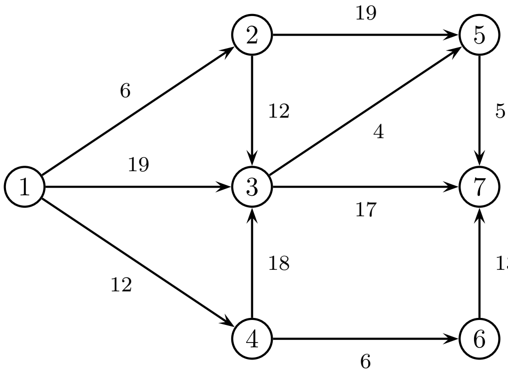


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (2,4) (5,4) (6,5)	(5,3)	$x =$		
(1,2) (2,5) (5,3) (5,4) (6,5)	(4,6)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

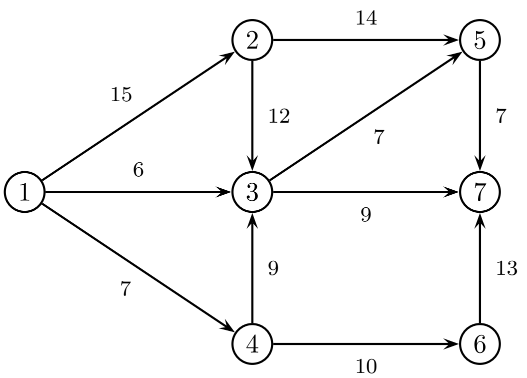
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,5) (3,2) (4,6) (6,5)	
Archi di U	(2,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacit minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 8\ x_2 \\ 17\ x_1 + 14\ x_2 \leq 64 \\ 10\ x_1 + 19\ x_2 \leq 64 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 citt, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

citt	**2**	**3**	**4**	**5**
1	15	26	66	47
2		99	58	58
3			12	9
4				15

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo pi vicino a partire dal nodo 1.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{23}.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Variabili decisionali:

Indichiamo con $i = 1, 2, 3$ gli esami A,B,C rispettivamente e con $j = 1, 2, 3, 4, 5$, i giorni della settimana dal lunedi al venerdi.
Sia $C = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 5)\}$.
x_{ij} = ore dedicate alla materia i nel giorno j, $(i, j) \in C$;

Modello:

$$\begin{cases} \max \sum_{(i,j)\in C} x_{ij} \\ x_{11} + x_{13} + x_{14} \geq 6 \\ x_{22} + x_{24} + x_{25} \geq 5 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{35} \geq 4 \\ x_{11} + x_{31} \leq 5 \\ x_{22} + x_{32} \leq 6 \\ x_{13} + x_{33} \leq 4 \\ x_{14} + x_{24} \leq 7 \\ x_{25} + x_{35} \leq 5 \\ x_{ij} \geq 0,\ (i, j) \in C \end{cases}$$

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

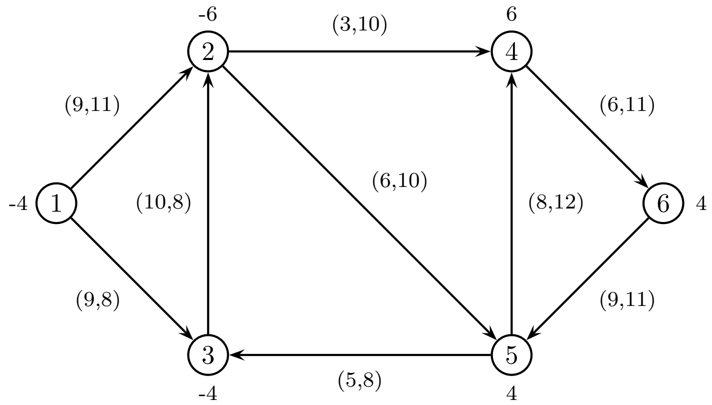
$$\begin{cases} \max\ -6\ x_1 + 5\ x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 13 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (3,\ -4)$	SI	NO
$\{3,\ 4\}$	$y = \left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{9}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{3,\ 4\}$	$(4,\ -8)$	$\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{9}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	3	$\frac{8}{3},\ 2$	6
2° iterazione	$\{4,\ 6\}$	$(3,\ -9)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{11}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$	4	$5,\ 20,\ 2$	5

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacit).

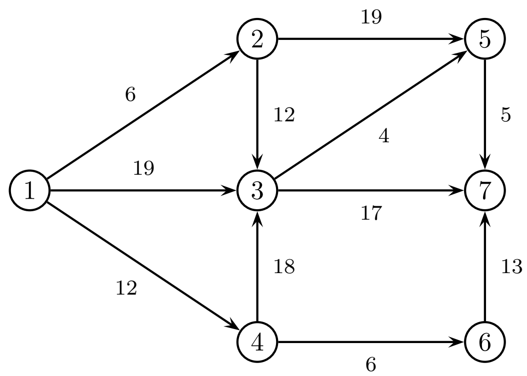


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (2,4) (5,4) (6,5)	(5,3)	$x = (16,\ -12,\ 22,\ 0,\ 0,\ 0,\ 8,\ -16,\ -4)$	NO	NO
(1,2) (2,5) (5,3) (5,4) (6,5)	(4,6)	$\pi = (0,\ 9,\ 20,\ 23,\ 15,\ 6)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

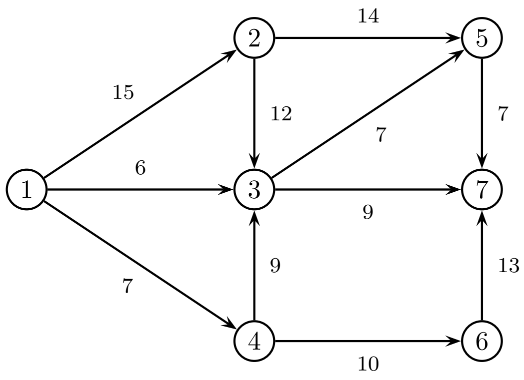
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,5) (3,2) (4,6) (6,5)	(1,2) (2,5) (3,2) (4,6) (6,5)
Archi di U	(2,4)	(2,4)
x	$(0,\ 4,\ 10,\ 4,\ 8,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0)$	$(4,\ 0,\ 10,\ 4,\ 4,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0)$
π	$(0,\ 19,\ 9,\ 10,\ 25,\ 16)$	$(0,\ 9,\ -1,\ 0,\ 15,\ 6)$
Arco entrante	(1,2)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	11 , 4	6 , 0
Arco uscente	(1,3)	(6,5)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		6		5		7	
nodo 2	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 3	19	1	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2
nodo 4	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 5	$+\infty$	-1	25	2	25	2	22	3	22	3	22	3	22	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	18	4	18	4	18	4	18	4	18	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	35	3	31	6	27	5	27	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		3, 5, 6		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0)	6
1 - 2 - 3 - 7	3	(3, 6, 0, 3, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0)	9
1 - 2 - 5 - 7	7	(10, 6, 0, 3, 7, 0, 9, 0, 0, 7, 0)	16
1 - 4 - 6 - 7	7	(10, 6, 7, 3, 7, 0, 9, 0, 7, 7, 7)	23

Taglio di capacit minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 8\ x_2 \\ 17\ x_1 + 14\ x_2 \leq 64 \\ 10\ x_1 + 19\ x_2 \leq 64 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{64}{17}, 0\right)$ $v_S(P) = 37$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (3, 0)$ $v_I(P) = 30$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $x_1 \leq 3$
$r = 4$ $7\,x_1 + 5\,x_2 \leq 26$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 citt, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

citt	**2**	**3**	**4**	**5**
1	15	26	66	47
2		99	58	58
3			12	9
4				15

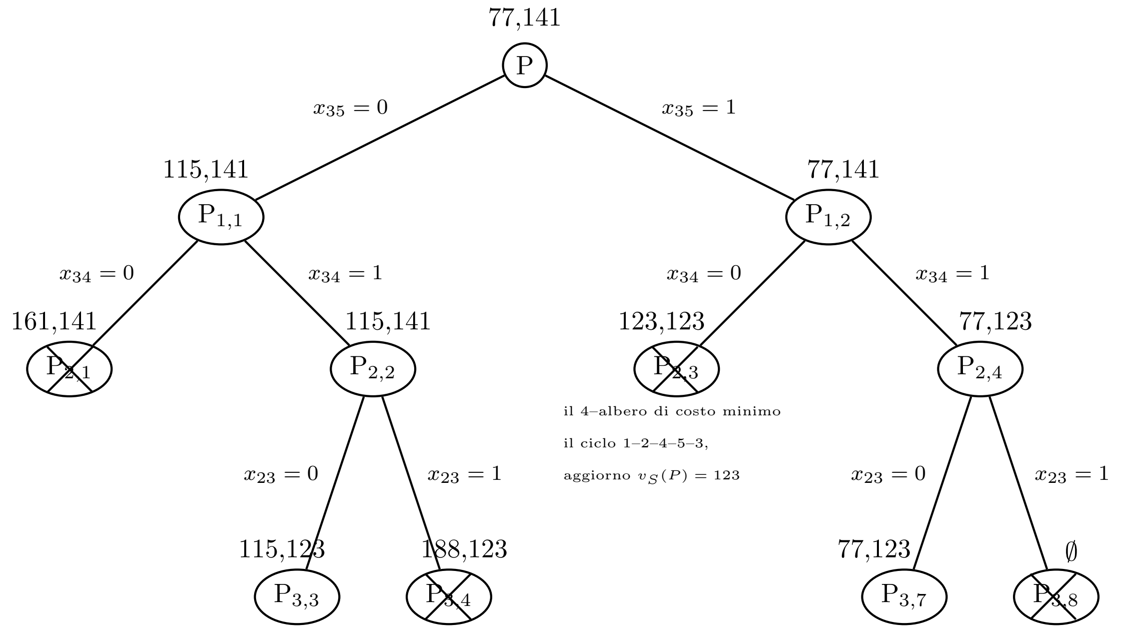
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: (1 , 2) (1 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $v_I(P) = 77$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo pi vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 2 - 4 - 3 - 5$ $v_S(P) = 141$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{23}.


77,141
P
$x_{35} = 0$
$x_{35} = 1$
115,141
$P_{1,1}$
77,141
$P_{1,2}$
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
161,141
$P_{2,1}$
115,141
$P_{2,2}$
123,123
$P_{2,3}$
77,123
$P_{2,4}$
il 4–albero di costo minimo
il ciclo 1–2–4–5–3,
aggiorno $v_S(P) = 123$
$x_{23} = 0$
$x_{23} = 1$
$x_{23} = 0$
$x_{23} = 1$
115,123
$P_{3,3}$
188,123
$P_{3,4}$
77,123
$P_{3,7}$
$\emptyset$
$P_{3,8}$