Esame di Ricerca Operativa del 05/07/16

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 8\,y_1 + 40\,y_2 + 4\,y_3 - 8\,y_4 - 20\,y_5 - 8\,y_6 \\ 8\,y_2 - 2\,y_3 - 2\,y_4 - 4\,y_5 - 3\,y_6 = -3 \\ -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + 3\,y_5 + y_6 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{3, 6\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{1,5\}$					
2° iterazione						

Esercizio 3. Un'industria siderurgica produce due laminati A e B da un composto C. L'industria può acquistare al più 180 quintali di composto C, ad un costo di 70 Euro al quintale. Per ottenere A e B è necessario un processo di lavorazione il cui costo per quintale prodotto è rispettivamente di 80 e 70 Euro. Inoltre la massima percentuale di A e B ottenibile da C è rispettivamente di 50 e 60. Sapendo che l'industria rivende sul mercato A e B a 10 e 7 Euro al kg rispettivamente, determinare la produzione che massimizza il profitto.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

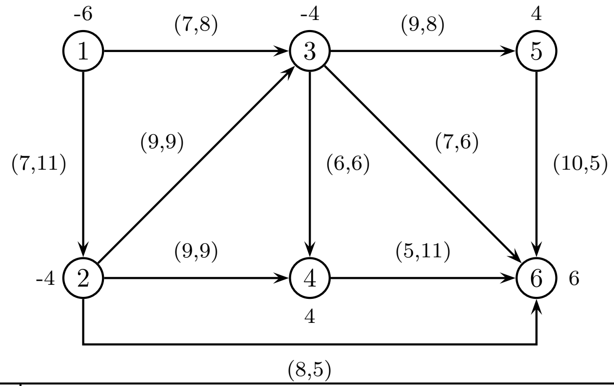
```
c= [-780 ; -515.8]                      intlin=

A=[ 2 ; 10/6 ]                          b=[180]

Aeq=                                    beq=

lb=                                     ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

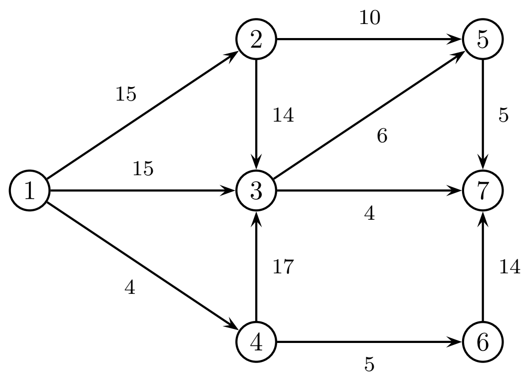


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,3) (3,4) (4,6) (5,6)	(2,4)	$x =$		
(1,3) (2,3) (2,6) (4,6) (5,6)	(1,2)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

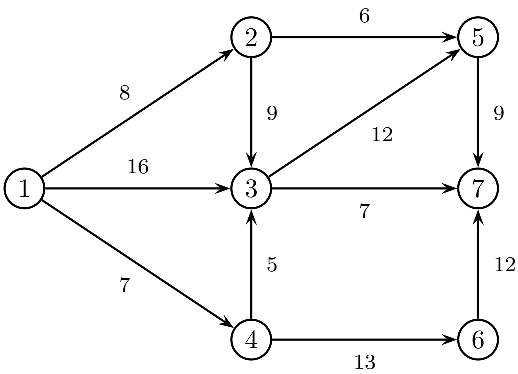
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,6) (3,5) (4,6) (5,6)	
Archi di U	(3,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 5\ x_2 \\ 7\ x_1 + 6\ x_2 \geq 68 \\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \geq 50 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	93	63	43
2		26	55	57
3			11	13
4				14

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{35}, x_{13}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 2x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \quad -x_1 x_2 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(0,1)							
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$							
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$							
(0,-1)							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -4\,x_1^2 - 6\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 - 4\,x_1 - 6\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(2,2)$, $(2,0)$, $(-3,1)$ e $(-2,-3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(2, \frac{4}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 8\ y_1 + 40\ y_2 + 4\ y_3 - 8\ y_4 - 20\ y_5 - 8\ y_6 \\ 8\ y_2 - 2\ y_3 - 2\ y_4 - 4\ y_5 - 3\ y_6 = -3 \\ -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + 3\ y_5 + y_6 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (4,\ -8)$	SI	NO
$\{3,\ 6\}$	$y = \left(0,\ 0,\ \frac{6}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{5}\right)$	SI	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{1,\ 5\}$	$(-1,\ -8)$	$\left(\frac{13}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0\right)$	3	$\frac{13}{10},\ \frac{3}{2}$	1
2° iterazione	$\{3,\ 5\}$	$\left(\frac{4}{5},\ -\frac{28}{5}\right)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{13}{10},\ 0,\ \frac{1}{10},\ 0\right)$	4	$\frac{13}{2},\ \frac{1}{4}$	5

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

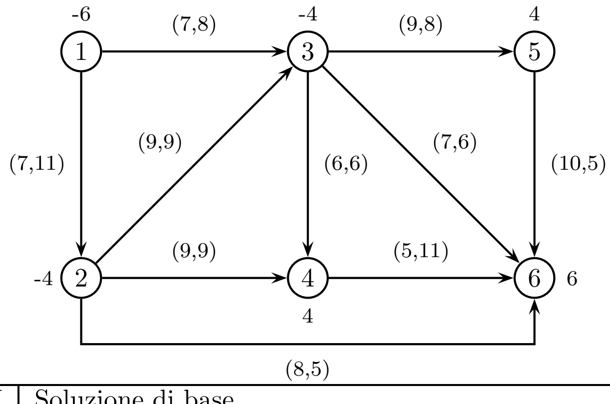
```
c=[ -780 ; -515.8 ]           intlin=

A=[ 2 ; 10/6 ]                b=[180 ]

Aeq=[]                        beq=[]

lb=[0 ; 0]                    ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

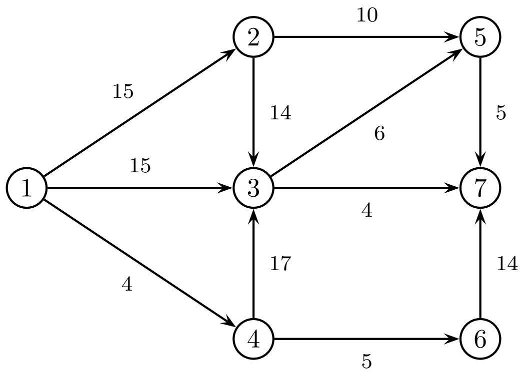


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,3) (3,4) (4,6) (5,6)	(2,4)	$x = (0,\ 6,\ -5,\ 9,\ 0,\ 5,\ 0,\ 0,\ 10,\ -4)$	NO	NO
(1,3) (2,3) (2,6) (4,6) (5,6)	(1,2)	$\pi = (0,\ -2,\ 7,\ 1,\ -4,\ 6)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

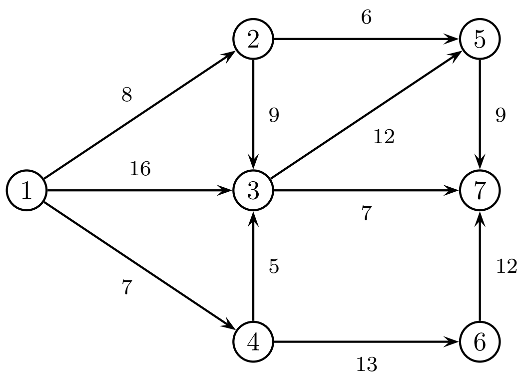
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,6) (3,5) (4,6) (5,6)	(1,2) (1,3) (2,6) (3,5) (4,6)
Archi di U	(3,4)	(3,4)
x	$(0,\ 6,\ 0,\ 0,\ 4,\ 6,\ 4,\ 0,\ 2,\ 0)$	$(0,\ 6,\ 0,\ 0,\ 4,\ 6,\ 4,\ 0,\ 2,\ 0)$
π	$(0,\ 18,\ 7,\ 21,\ 16,\ 26)$	$(0,\ 7,\ 7,\ 10,\ 16,\ 15)$
Arco entrante	(1,2)	(3,4)
$\vartheta^+,\ \vartheta^-$	1 , 0	1 , 2
Arco uscente	(5,6)	(2,6)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		6		2		3		7		5	
nodo 2	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 3	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 4	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	25	2	21	3	21	3	21	3
nodo 6	$+\infty$	-1	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	6	23	6	19	3	19	3	19	3
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 3, 7		3, 5, 7		5, 7		5		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	7	(0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0)	7
1 - 2 - 5 - 7	6	(6, 7, 0, 0, 6, 0, 7, 0, 0, 6, 0)	13
1 - 3 - 5 - 7	3	(6, 10, 0, 0, 6, 3, 7, 0, 0, 9, 0)	16
1 - 4 - 6 - 7	7	(6, 10, 7, 0, 6, 3, 7, 0, 7, 9, 7)	23

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 5\ x_2 \\ 7\ x_1 + 6\ x_2 \geq 68 \\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \geq 50 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{34}{3}\right)$ $\qquad v_I(P) = 57$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 12)$ $\qquad v_S(P) = 60$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2 \qquad 6\,x_1 + 5\,x_2 \geq 57$

$r = 4 \qquad 5\,x_1 + 4\,x_2 \geq 46$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	93	63	43
2		26	55	57
3			11	13
4				14

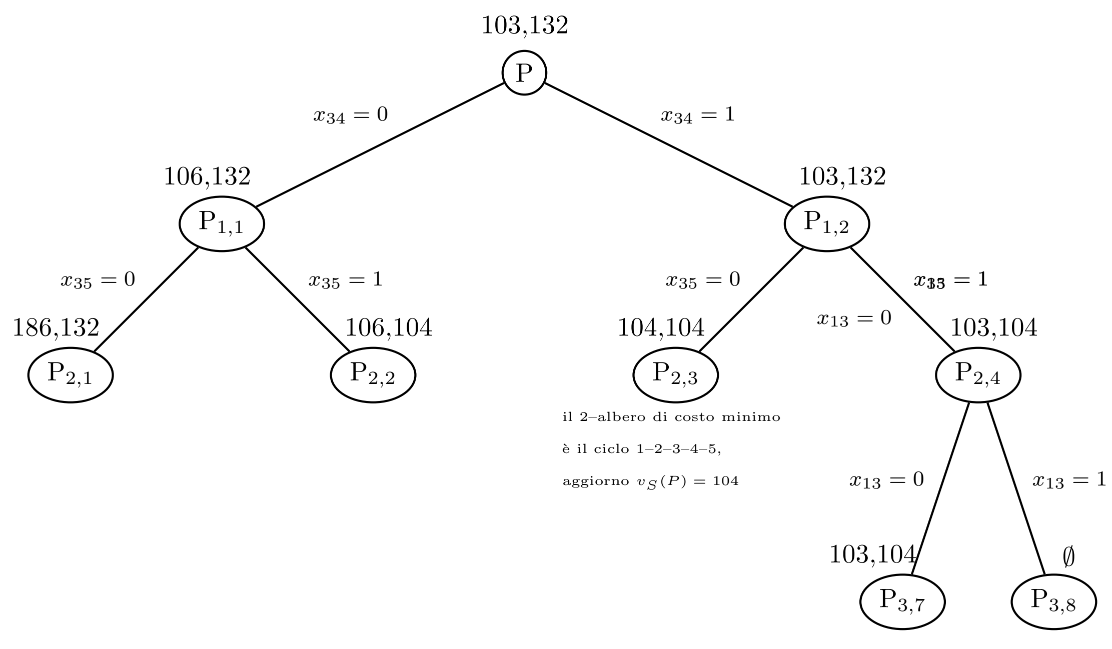
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: (1 , 2) (1 , 5) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) $\qquad v_I(P) = 103$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: 4 − 3 − 5 − 1 − 2 $\qquad v_S(P) = 132$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{35}, x_{13}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 2x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad -x_1 x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ 1)$	$(1,1)$		NO	NO	SI	SI	NO
$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, 2\sqrt{2}\right)$		NO	NO	NO	SI	NO
$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$	$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}, -2\sqrt{2}\right)$		NO	SI	NO	NO	NO
$(0,\ -1)$	$(-1,-1)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1^2 - 6\ x_1\, x_2 + 4\ x_2^2 - 4\ x_1 - 6\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(2,2)$, $(2,0)$, $(-3,1)$ e $(-2,-3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(2, \frac{4}{3}\right)$	$(1,0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left(0, -\dfrac{22}{3}\right)$	$\dfrac{2}{11}$	$\dfrac{2}{11}$	$(2,0)$