Esame di Ricerca Operativa del 05/02/19

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale.

$$\begin{cases} \min\ 17\ y_1 + 28\ y_2 + 16\ y_3 + 3\ y_4 + 3\ y_5 + 19\ y_6 \\ -6\ y_1 + 7\ y_2 + 4\ y_3 - 2\ y_4 - 2\ y_5 + 2\ y_6 = 2 \\ 10\ y_1 + 2\ y_2 - 3\ y_3 - 4\ y_4 + 2\ y_5 - y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

	Base	x	Degenere?	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° passo	{5,6}						
2° passo							

Esercizio 2. Un'azienda produce 4 tipi di TV (32, 40, 50 e 55 pollici) ed è divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 operai in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre i TV e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

TV	32"	40"	50"	55"
Stabilimento A	1.2	1.5	1.7	2
Stabilimento B	1.5	1.6	1.8	2.1
Richiesta	1000	700	600	400

Sapendo che i 4 tipi di TV vengono venduti rispettivamente a 400, 600, 1000, e 1500 euro, l'azienda vuole determinare quanti TV di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

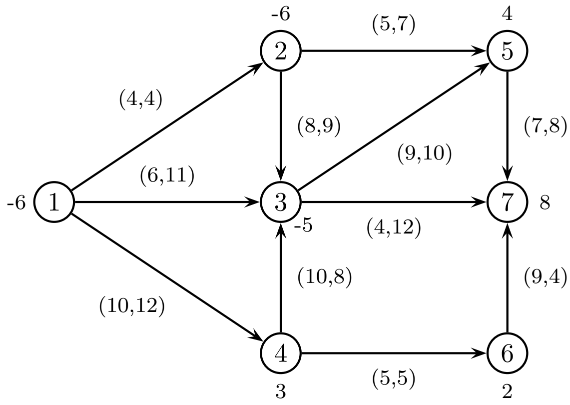
```
c=                                  intcon=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 14\ x_2 \\ 15\ x_1 + 6\ x_2 \leq 61 \\ 13\ x_1 + 14\ x_2 \leq 65 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

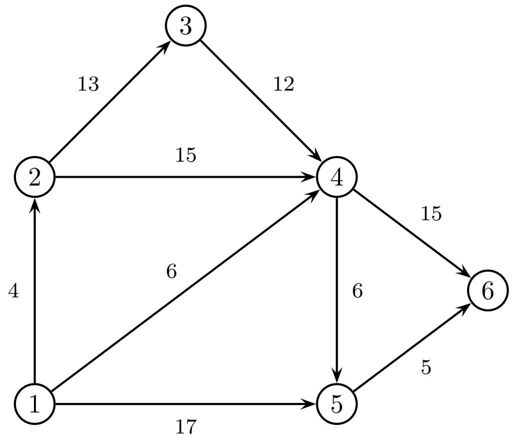
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

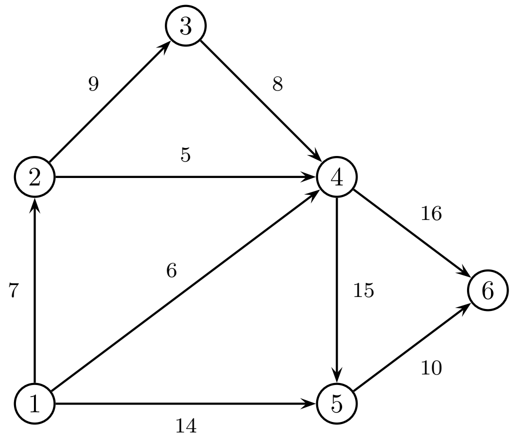
$r =$	taglio:

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato												
nodo 2												
nodo 3												
nodo 4												
nodo 5												
nodo 6												
insieme Q												

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 6. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	30	27	30	49
2		19	95	63
3			29	28
4				61

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{23}, x_{24}, x_{45}.

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ -2)$							
$(0,\ -1)$							
$\left(\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$							
$\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$							
$(0,\ 1)$							
$(0,\ 2)$							

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -4\, x_1\, x_2 - 4\, x_2^2 + 5\, x_1 + 10\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(-2, -3)$ e $(2, -3)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$					

SOLUZIONI

Esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{5,\ 6\}$	$\left(\frac{41}{2},\ 22\right)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3)$	1	$\frac{2}{7},\ \frac{3}{4}$	5
2° iterazione	$\{1,\ 6\}$	$\left(\frac{207}{14},\ \frac{74}{7}\right)$	$\left(\frac{2}{7},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{13}{7}\right)$	2	$\frac{4}{11},\ \frac{13}{41}$	6

Esercizio 2.

$$\begin{cases} \max\ 400\,(x_{1A}+x_{1B})+600\,(x_{2A}+x_{2B})+1000\,(x_{3A}+x_{3B})+1500\,(x_{4A}+x_{4B}) \\ 1.2\,x_{1A}+1.5\,x_{2A}+1.7\,x_{3A}+2\,x_{4A}\le 1600 \\ 1.5\,x_{1B}+1.6\,x_{2B}+1.8\,x_{3B}+2.1\,x_{4B}\le 2000 \\ x_{1A}+x_{1B}\ge 1000 \\ x_{2A}+x_{2B}\ge 700 \\ x_{3A}+x_{3B}\ge 600 \\ x_{4A}+x_{4B}\ge 400 \\ x_{ij}\ge 0 \\ x_{ij}\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 3.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (3,7) (4,6) (5,7)
Archi di U	(2,5)	(2,5)
x	(1, 0, 5, 0, 7, 5, 0, 0, 2, 8, 0)	(1, 0, 5, 0, 7, 0, 5, 0, 2, 3, 0)
π	(0, 4, 6, 10, 15, 15, 22)	(0, 4, 6, 10, 3, 15, 10)
Arco entrante	(3,7)	(2,5)
ϑ^+, ϑ^-	12 , 5	7 , 1
Arco uscente	(3,5)	(1,2)

Esercizio 4.

a)

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \frac{65}{14}\right)$ $\qquad v_S(P) = 65$

b)

sol. ammissibile $= (0,4)$ $\qquad v_I(P) = 56$

c)

$r = 2$ $\qquad x_2 \le 4$

$r = 3$ $\qquad 7\,x_1 + 8\,x_2 \le 37$

Esercizio 5. a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		5		3		6	
nodo 2	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 3	$+\infty$	-1	17	2	17	2	17	2	17	2	17	2
nodo 4	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 5	17	1	17	1	12	4	12	4	12	4	12	4
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	21	4	17	5	17	5	17	5
insieme Q	2, 4, 5		3, 4, 5		3, 5, 6		3, 6		6		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 4 - 6	6	(0, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 6, 0)	6
1 - 5 - 6	10	(0, 6, 10, 0, 0, 0, 0, 6, 10)	16
1 - 2 - 4 - 6	5	(5, 6, 10, 0, 5, 0, 0, 11, 10)	21
1 - 2 - 3 - 4 - 6	2	(7, 6, 10, 2, 5, 2, 0, 13, 10)	23

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 5\}$ $\quad N_t = \{2, 3, 4, 6\}$

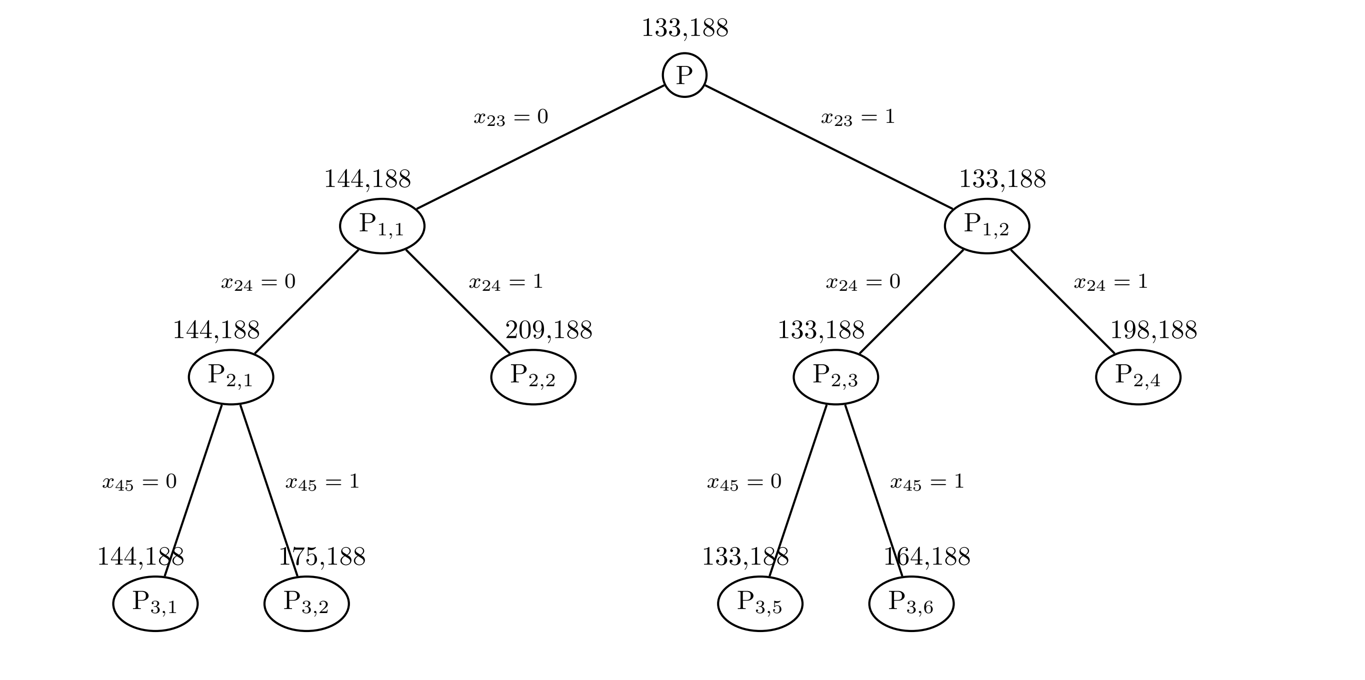
Esercizio 6. a)

4–albero: (1 , 3) (1 , 4) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) $\qquad v_I(P) = 133$

b)

ciclo: 4 – 3 – 2 – 1 – 5 $\qquad v_S(P) = 188$

c)



Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ -2)$	$(0, 16)$		NO	NO	NO	SI	NO
$(0,\ -1)$	$(-6, 0)$		NO	SI	NO	NO	NO
$\left(\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$	$(0, 1)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$	$(0, 1)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(0,\ 1)$	$(2, 0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(0,\ 2)$	$(0, 0)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 8.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$	$10.3333\, x_1 + 26\, x_2$	(-2 ,-3)	$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$	1	$(-2, -3)$