Esame di Ricerca Operativa del 04/05/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Due supermercati S_1 e S_2, di proprieta' di una stessa azienda, richiedono mensilmente 40 e 50 ettolitri di latte per la vendita. Il latte viene rifornito da tre centrali C_1, C_2, C_3, ciascuna delle quali puo' rifornire una quantità massima mensile di latte pari a 30, 40 e 50 ettolitri, rispettivamente. Nella seguente tabella sono riportati i costi di trasporto (in euro per ettolitro) del latte, dalla centrale C_i al supermercato S_j, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$.

	S_1	S_2
C_1	10	8
C_2	6	12
C_3	14	10

Sapendo che il supermercato S_1 deve acquisire dalla centrale C_1 una quantitá di latte pari ad almeno quella acquisita da entrambe le centrali C_2 e C_3, si formuli un problema di programmazione lineare per minimizzare il costo complessivo mensile di rifornimento del latte richiesto dai due supemercati.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

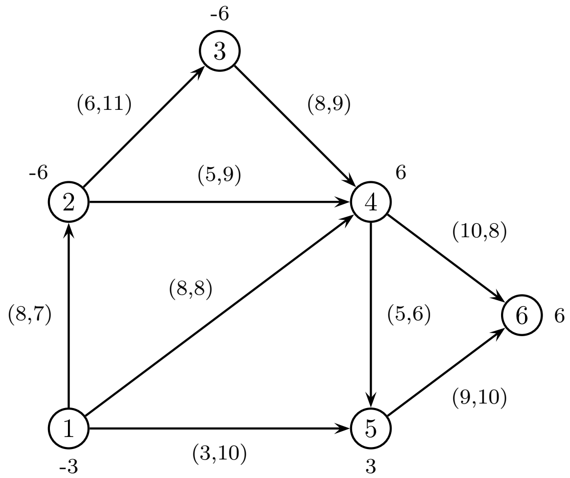
$$\begin{cases} \max\ 6\ x_1 - x_2 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq 4 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 9 \\ -x_1 - x_2 \leq 1 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 11 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{2, 5}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,5}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

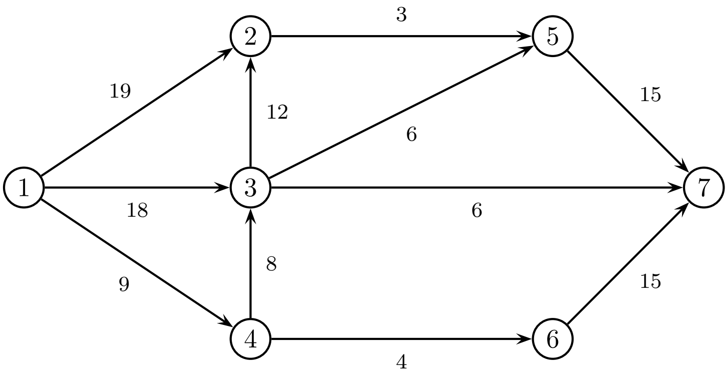


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,5) (2,4) (3,4) (4,5) (5,6)	(2,3)	$x =$		
(1,2) (1,5) (2,3) (4,6) (5,6)	(2,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

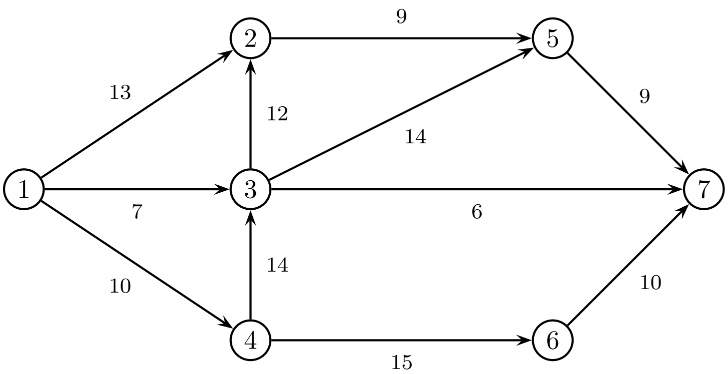
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (4,5) (4,6)	
Archi di U	(3,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 11\ x_2 \\ 19\ x_1 + 5\ x_2 \leq 55 \\ 13\ x_1 + 15\ x_2 \leq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	29	24	67	47
2		18	94	61
3			23	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24}, x_{45}.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

Variabili decisionali:

x_{ij} = quantitá (in ettolitri) di latte forniti mensilmente dalla centrale C_i al supermercato S_j, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$;

Modello:

$$\begin{cases} \min\ 10x_{11} + 8x_{12} + 6x_{21} + 12x_{22} + 14x_{31} + 10x_{32} \\ x_{11} + x_{12} \leq 30 \\ x_{21} + x_{22} \leq 40 \\ x_{31} + x_{32} \leq 50 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50 \\ x_{11} - x_{21} - x_{31} \geq 0 \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

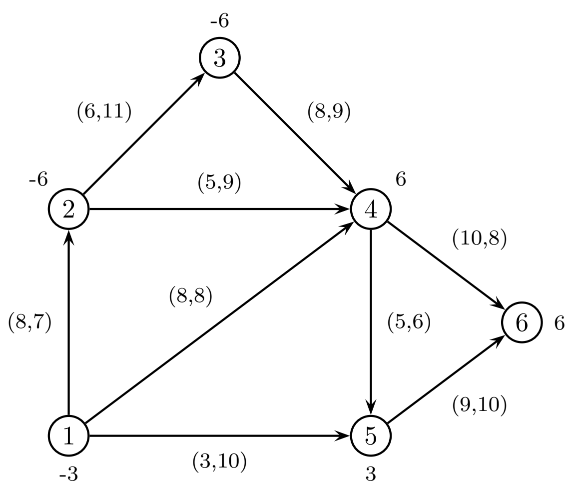
$$\begin{cases} \max\ 6\ x_1 - x_2 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq 4 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 9 \\ -x_1 - x_2 \leq 1 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 11 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (2,\ 3)$	SI	NO
$\{2,\ 5\}$	$y = \left(0,\ \frac{4}{3},\ 0,\ 0,\ -\frac{11}{3},\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$(-1,\ 0)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{4}{3},\ -\frac{7}{3},\ 0\right)$	4	$\frac{36}{5},\ 3,\ 36,\ 36$	2
2° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(0,\ 2)$	$\left(0,\ \frac{4}{3},\ 0,\ 0,\ -\frac{11}{3},\ 0\right)$	5	$3,\ \frac{33}{5},\ \frac{33}{2}$	1

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

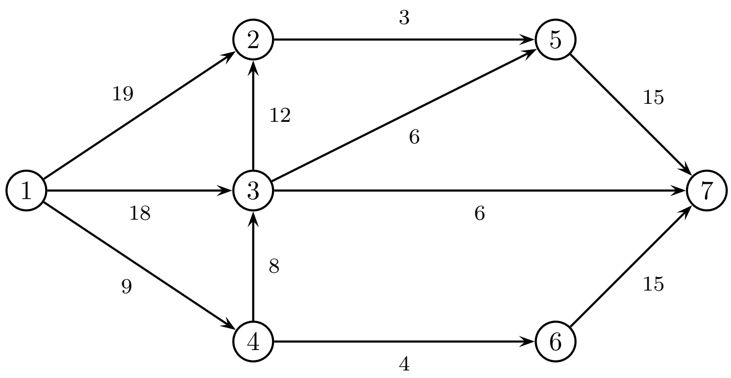


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,5) (2,4) (3,4) (4,5) (5,6)	(2,3)	$x = (0,\ 0,\ 3,\ 11,\ -5,\ 17,\ 6,\ 0,\ 6)$	NO	SI
(1,2) (1,5) (2,3) (4,6) (5,6)	(2,4)	$\pi = (0,\ 8,\ 14,\ 2,\ 3,\ 12)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

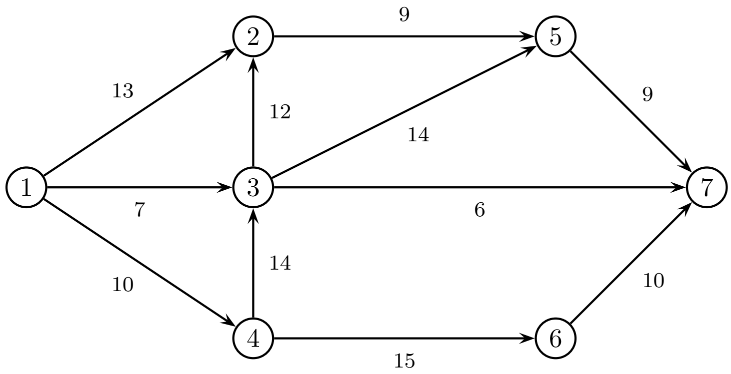
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (4,5) (4,6)	(1,4) (2,3) (2,4) (4,5) (4,6)
Archi di U	(3,4)	(3,4)
x	(3, 0, 0, 3, 6, 9, 3, 6, 0)	(0, 3, 0, 3, 3, 9, 3, 6, 0)
π	(0, 8, 14, 13, 18, 23)	(0, 3, 9, 8, 13, 18)
Arco entrante	(1,4)	(1,5)
ϑ^+, ϑ^-	8 , 3	10 , 3
Arco uscente	(1,2)	(1,4)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		6		3		2		5		7	
nodo 2	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1
nodo 3	18	1	17	4	17	4	17	4	17	4	17	4	17	4
nodo 4	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	3	22	2	22	2	22	2
nodo 6	$+\infty$	-1	13	4	13	4	13	4	13	4	13	4	13	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	28	6	23	3	23	3	23	3	23	3
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 3, 7		2, 5, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0)	6
1 - 2 - 5 - 7	9	(9, 6, 0, 9, 0, 0, 6, 0, 0, 9, 0)	15
1 - 4 - 6 - 7	10	(9, 6, 10, 9, 0, 0, 6, 0, 10, 9, 10)	25

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1,2,3,5\}$ $N_t = \{4,6,7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 11\ x_2 \\ 19\ x_1 + 5\ x_2 \leq 55 \\ 13\ x_1 + 15\ x_2 \leq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \dfrac{41}{15}\right)$ $v_S(P) = 30$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(0, 2)$ $v_I(P) = 22$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $x_2 \leq 2$
$r = 3$ $8\,x_1 + 10\,x_2 \leq 27$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	29	24	67	47
2		18	94	61
3			23	26
4				20

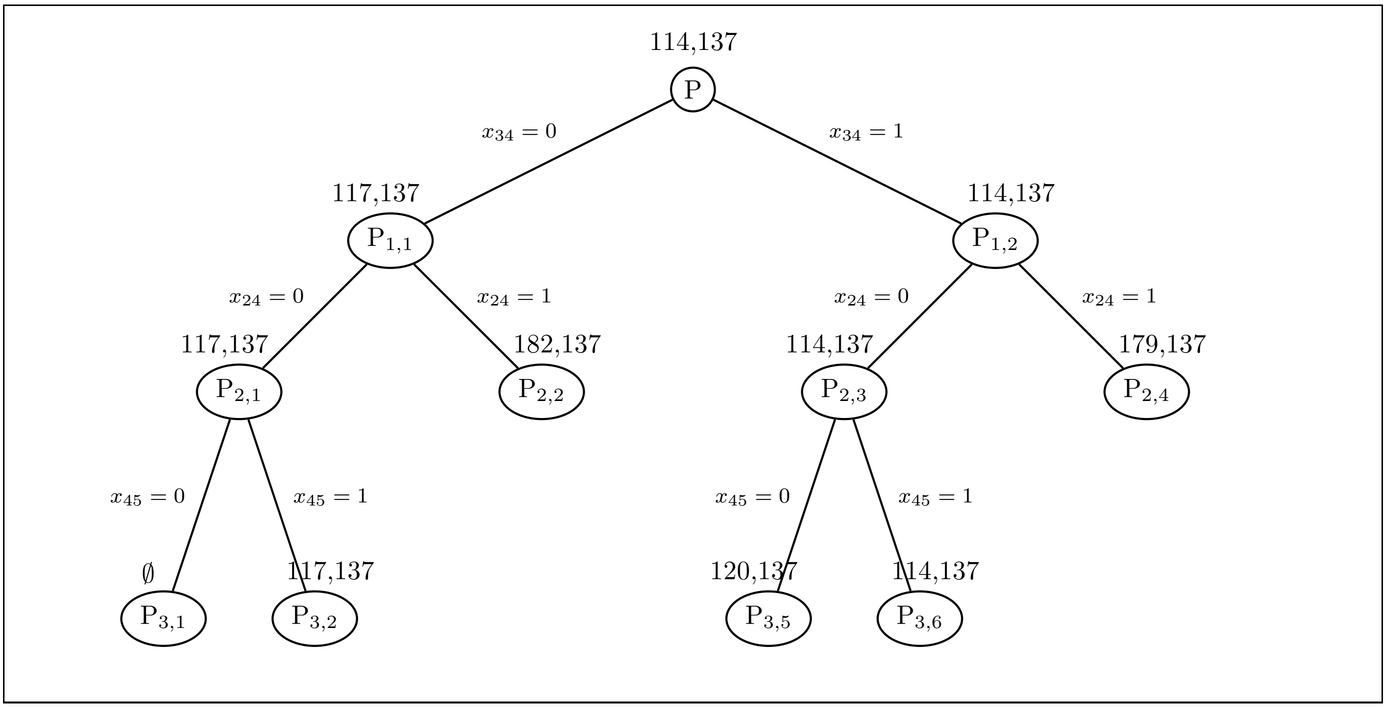
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: (1 , 2) (1 , 3) (2 , 3) (3 , 4) (4 , 5) $v_I(P) = 114$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: 2 – 3 – 4 – 5 – 1 $v_S(P) = 137$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24}, x_{45}.


114,137
P
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
117,137
$P_{1,1}$
114,137
$P_{1,2}$
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
117,137
$P_{2,1}$
182,137
$P_{2,2}$
114,137
$P_{2,3}$
179,137
$P_{2,4}$
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
$\emptyset$
$P_{3,1}$
117,137
$P_{3,2}$
120,137
$P_{3,5}$
114,137
$P_{3,6}$