Esame di Ricerca Operativa del 04/02/16

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\ y_1 + 2\ y_2 + 7\ y_3 + 11\ y_4 + 28\ y_5 + 35\ y_6 \\ -y_1 - 5\ y_2 + y_3 - 2\ y_4 + 5\ y_5 + 6\ y_6 = 1 \\ -2\ y_1 - y_2 + y_3 + 3\ y_4 - 2\ y_5 - y_6 = -3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\,2\}$	$x =$		
$\{1,\,5\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{2,6}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una fabbrica produce 4 tipi di lavatrici ed è divisa in 2 stabilimenti A e B. La fabbrica dispone di 65 operai in A e 40 in B ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno per 5 giorni la settimana. In tabella abbiamo: tempo di lavorazione in ore e la richiesta minima di mercato da soddisfare

	1	2	3	4
A	1	1.2	1.5	1.2
B	1.5	0.8	2	0.5
Richiesta	500	400	200	150

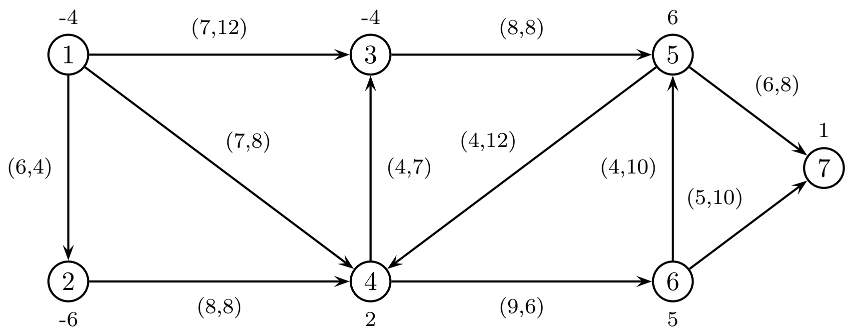
Sapendo che il prezzo di vendita è rispettivamente di 500, 600, 900, e 300 euro per ogni lavatrice, determinare il piano produttivo migliore.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

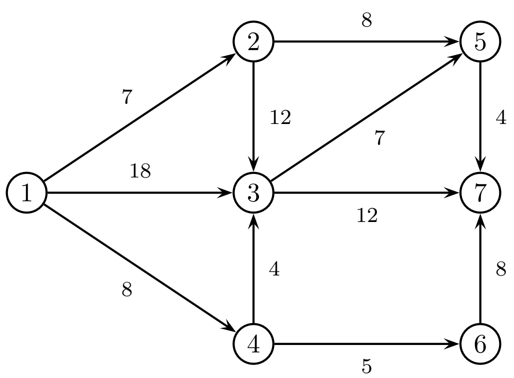


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (1,4) (5,4) (5,7) (6,5)	(3,5)	$x =$		
(1,3) (2,4) (3,5) (4,3) (4,6) (6,7)	(5,7)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

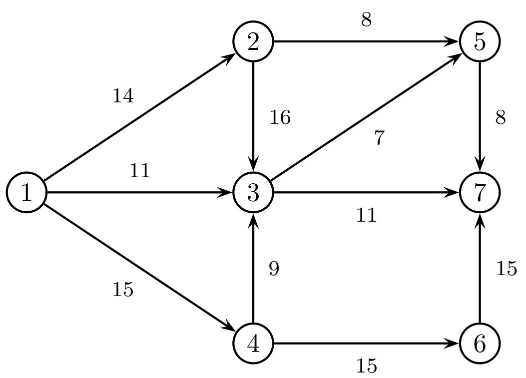
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (2,4) (4,6) (5,4) (5,7)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 6\ x_2 \\ 17\ x_1 + 10\ x_2 \geq 50 \\ 11\ x_1 + 16\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	41	62	52
2		27	54	96
3			11	13
4				94

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{35}, x_{25}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ -2)$							
$(0,\ -1)$							
$\left(\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$							
$\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$							
$(0,\ 1)$							
$(0,\ 2)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\,x_1^2 - 8\,x_1\,x_2 + 2\,x_2^2 + 3\,x_1 - 9\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(4, -4)$, $(1, 1)$, $(-2, 2)$ e $(-4, -2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\,y_1 + 2\,y_2 + 7\,y_3 + 11\,y_4 + 28\,y_5 + 35\,y_6 \\ -y_1 - 5\,y_2 + y_3 - 2\,y_4 + 5\,y_5 + 6\,y_6 = 1 \\ -2\,y_1 - y_2 + y_3 + 3\,y_4 - 2\,y_5 - y_6 = -3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (0,\ -2)$	SI	NO
$\{1,\ 5\}$	$y = \left(\frac{13}{12},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{5}{12},\ 0\right)$	SI	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

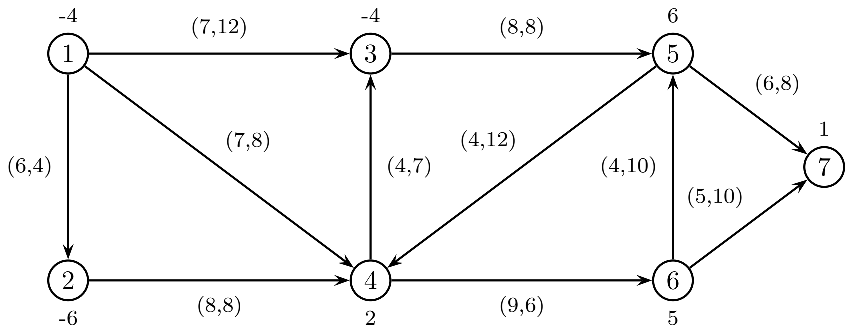
	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{2,\ 6\}$	$(3,\ -17)$	$\left(0,\ \frac{17}{11},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{16}{11}\right)$	1	$\frac{17}{13},\ \frac{16}{9}$	2
2° iterazione	$\{1,\ 6\}$	$\left(\frac{66}{13},\ -\frac{59}{13}\right)$	$\left(\frac{17}{13},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{5}{13}\right)$	5	$\frac{17}{7},\ \frac{5}{12}$	6

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

```
c=-[ 500 ; 600 ; 900 ; 300 ; 500 ; 600 ; 900 ; 300 ]

A=[ 1 1.2 1.5 1.2 0000;000001.5 0.8 2 0.5;-1000-1000; 0-1000-100;00-1000-10;000-1000-1 ]

b=[ 2600 ; 1600 ; -500 ; -400 ; -200 ; -150 ]

Aeq=[]  beq=[]

lb=[0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 , 0 ; 0 ]  ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

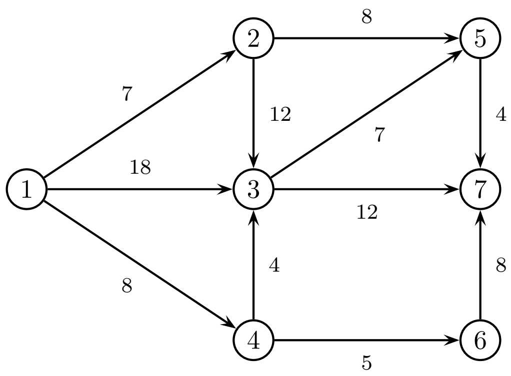


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (1,4) (5,4) (5,7) (6,5)	(3,5)	$x = (-6,\ 4,\ 6,\ 0,\ 8,\ 0,\ 0,\ -4,\ 1,\ -5,\ 0)$	NO	NO
(1,3) (2,4) (3,5) (4,3) (4,6) (6,7)	(5,7)	$\pi = (0,\ -5,\ 7,\ 3,\ 15,\ 12,\ 17)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

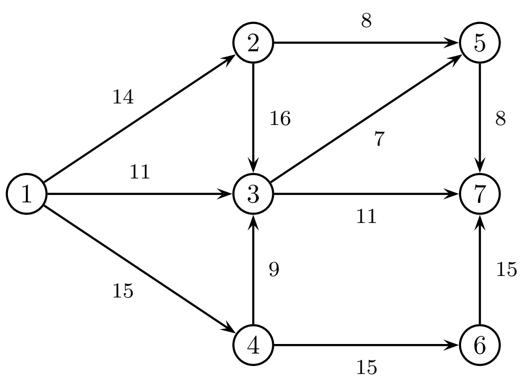
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (2,4) (4,6) (5,4) (5,7)	(1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,4) (5,7)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(0, 4, 0, 6, 8, 0, 5, 1, 1, 0, 0)	(0, 4, 0, 6, 8, 0, 5, 1, 1, 0, 0)
π	(0, 6, 7, 14, 10, 23, 16)	(0, −1, 7, 7, 3, 16, 9)
Arco entrante	(1,4)	(3,5)
ϑ^+, ϑ^-	8 , 0	8 , 1
Arco uscente	(1,2)	(5,4)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		6		5		7	
nodo 2	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
nodo 3	18	1	18	1	12	4	12	4	12	4	12	4	12	4
nodo 4	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 5	$+\infty$	-1	15	2	15	2	15	2	15	2	15	2	15	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	13	4	13	4	13	4	13	4	13	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	24	3	21	6	19	5	19	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		3, 5, 6		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	11	(0, 11, 0, 0, 0, 0, 11, 0, 0, 0, 0)	11
1 - 2 - 5 - 7	8	(8, 11, 0, 0, 8, 0, 11, 0, 0, 8, 0)	19
1 - 4 - 6 - 7	15	(8, 11, 15, 0, 8, 0, 11, 0, 15, 8, 15)	34

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 6\ x_2 \\ 17\ x_1 + 10\ x_2 \geq 50 \\ 11\ x_1 + 16\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{40}{27}, \frac{67}{27}\right)$ $\qquad v_I(P) = 23$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (2, 3)$ $\qquad v_S(P) = 28$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 16\, x_1 + 10\, x_2 \geq 49$
$r = 2$ $\qquad 11\, x_1 + 15\, x_2 \geq 54$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	41	62	52
2		27	54	96
3			11	13
4				94

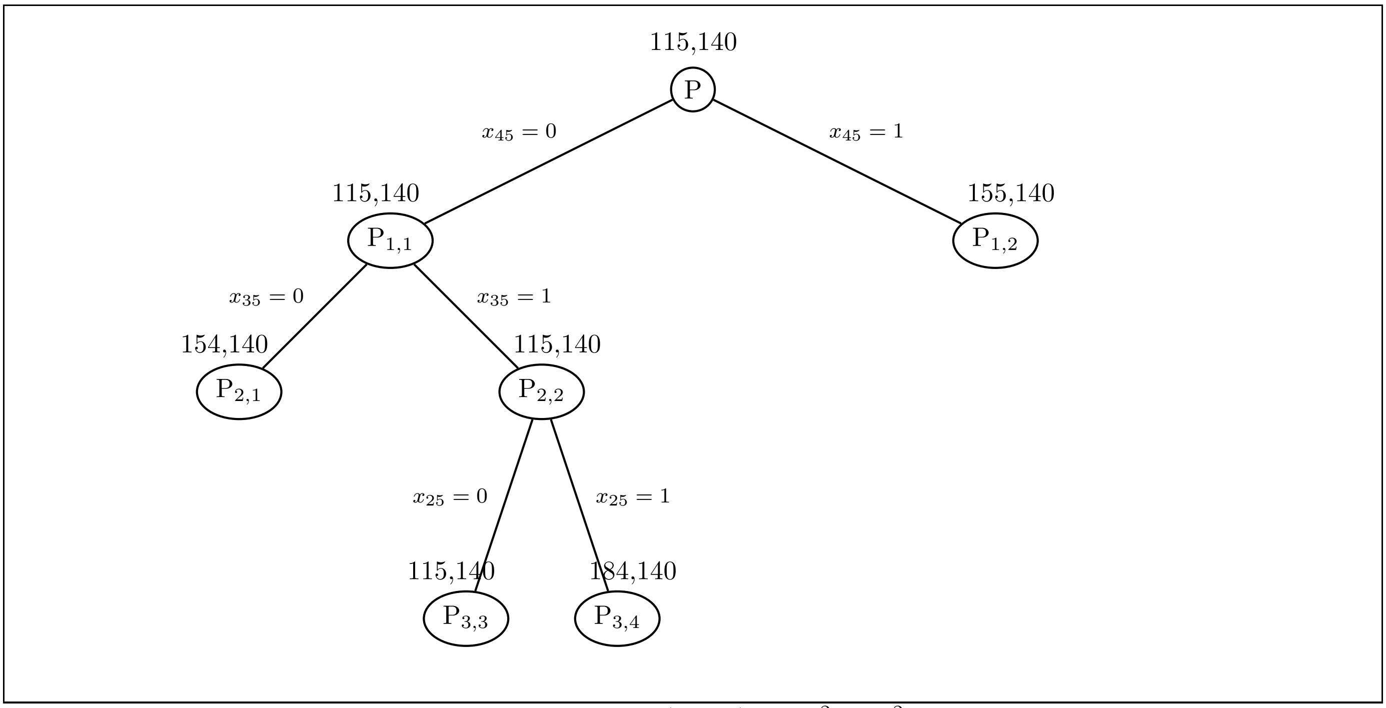
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: (1 , 2) (2 , 3) (2 , 4) (3 , 4) (3 , 5) $\qquad v_I(P) = 115$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: 3 – 4 – 2 – 1 – 5 $\qquad v_S(P) = 140$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{35}, x_{25}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ -2)$	$(0,16)$		NO	NO	NO	SI	NO
$(0,\ -1)$	$(-6,0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$	$(0,1)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$	$(0,1)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(0,\ 1)$	$(2,0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(0,\ 2)$	$(0,0)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\ x_1^2 - 8\ x_1\, x_2 + 2\ x_2^2 + 3\ x_1 - 9\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(4, -4)$, $(1, 1)$, $(-2, 2)$ e $(-4, -2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)$	$(-1, -4)$	$\begin{pmatrix} 16/17 & -4/17 \\ -4/17 & 1/17 \end{pmatrix}$	$\left(-\frac{92}{3}, \frac{23}{3}\right)$	$\frac{4}{23}$	$\frac{4}{23}$	$(-4, -2)$