**Esame di Ricerca Operativa del 03/07/18**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema

$$\begin{cases} \min\ 12\ y_1 + 4\ y_2 + 2\ y_3 + 2\ y_4 + 6\ y_5 + 8\ y_6 \\ 3\ y_1 + y_2 - 2\ y_3 - 2\ y_4 - y_5 - 3\ y_6 = 8 \\ y_1 - y_2 + y_3 - 3\ y_4 + 3\ y_5 + 4\ y_6 = 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| | Base | $x$ | degenere | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| passo 1 | {2,6} | | | | | | |
| passo 2 | | | | | | | |

**Esercizio 2.** Una cooperativa di taxi deve garantire il servizio 24/24 ore al giorno. Ogni taxi lavora 8 ore consecutive ogni 24 ore. Il numero minimo di taxi in ogni fascia oraria é dato dalla seguente tabella:

| Fascia oraria | Numero minimo | Fascia oraria | Numero minimo |
|---|---|---|---|
| 2-6 | 3 | 14-18 | 7 |
| 6-10 | 8 | 18-22 | 12 |
| 10-14 | 10 | 22-2 | 4 |

Formulare un modello che trovi il numero minimo di taxi necesssari ad espletare il servizio

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

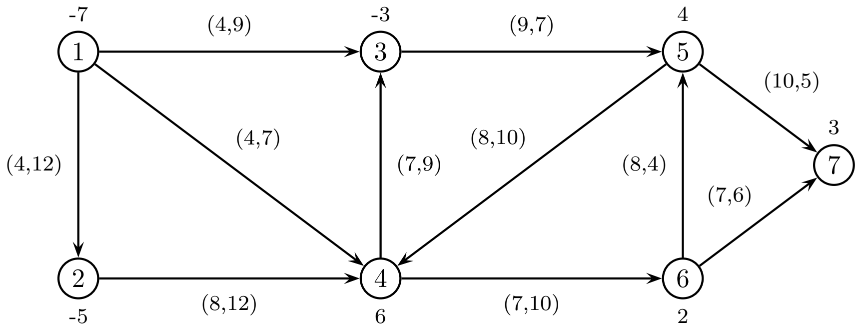
```
c=                                  intcon=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| degenere | | |
| $\pi$ | | |
| degenere | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\,x_1 + 5\,x_2 \\ 16\,x_1 + 10\,x_2 \leq 43 \\ 13\,x_1 + 15\,x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_S(P) =$ |

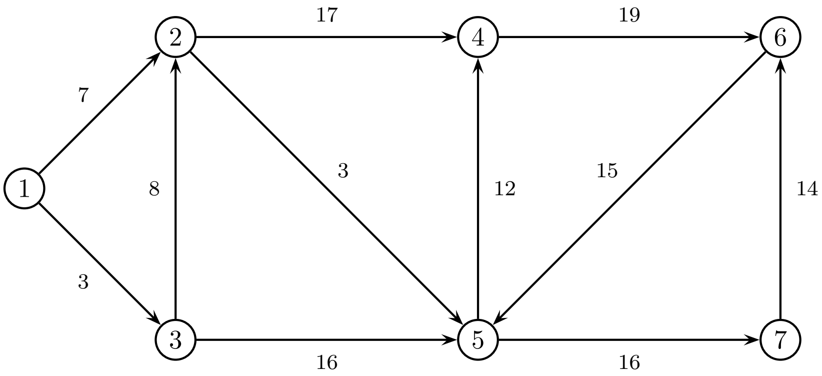
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_I(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

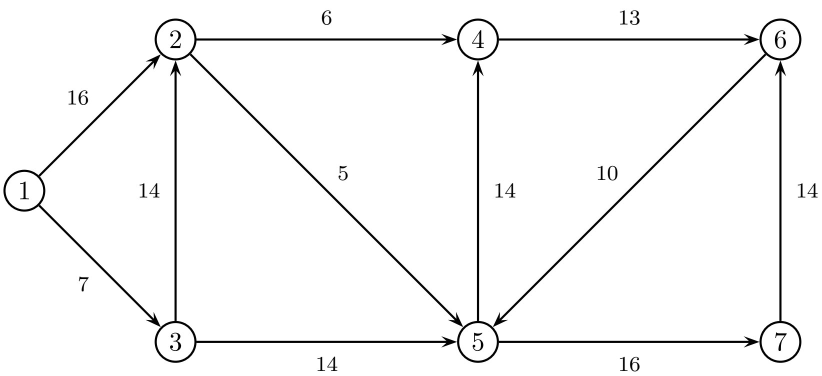
| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di caricare un contenitore di volume pari a 571 decimetri cubici, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 21 | 17 | 18 | 11 | 8 | 12 | 24 |
| Volumi | 256 | 411 | 447 | 108 | 228 | 26 | 289 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1 + 3x_2^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0, \quad x_1 + (0.25)x_2^2 - 1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\ x_1^2 - 4\ x_1\, x_2 - 4\ x_2^2 - 9\ x_1 + 3\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(1, 3)$ , $(3, 0)$ , $(4, 2)$ e $(-1, -1)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 6\}$ | $(24,\ 20)$ | $(0,\ 47,\ 0,\ 0,\ 0,\ 13)$ | 1 | $\frac{47}{15},\ \frac{13}{4}$ | 2 |
| 2° iterazione | $\{1,\ 6\}$ | $\left(\frac{8}{3},\ 4\right)$ | $\left(\frac{47}{15},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{7}{15}\right)$ | 5 | $\frac{47}{5},\ \frac{7}{10}$ | 6 |

**Esercizio 2.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[1 1 1 1 1 1]                intcon=[1 2 3 4 5 6]

beq=[]                         b=[-3;-8;-10;-7;-12;-4]

Aeq=[]                         A=[-10000-1;-1-10000;0-1-1000;00-1-100;000-1-10;0000-1-1]

lb=[0 0 0 0 0 0]               ub=[]
```

**Esercizio 3.**

| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5) | (1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,7) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | $(0,\ 4,\ 3,\ 5,\ 7,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0)$ | $(0,\ 4,\ 3,\ 5,\ 7,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0)$ |
| degenere | SI | SI |
| $\pi$ | $(0,\ -4,\ 4,\ 4,\ 19,\ 11,\ 29)$ | $(0,\ -4,\ 4,\ 4,\ 8,\ 11,\ 18)$ |
| degenere | NO | NO |
| Arco entrante | (6,7) | (3,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 6 , 0 | 4 , 3 |
| Arco uscente | (6,5) | (5,7) |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\ x_1 + 5\ x_2 \\ 16\ x_1 + 10\ x_2 \leq 43 \\ 13\ x_1 + 15\ x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{43}{16}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 37$

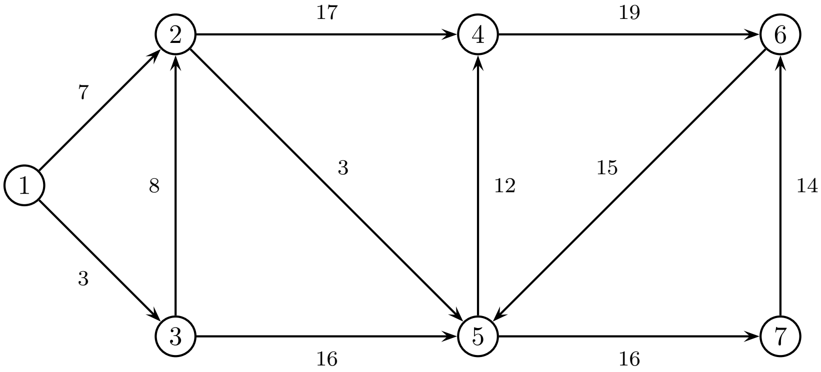
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo.

sol. ammissibile $= (2, 0)$ $\qquad v_I(P) = 28$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

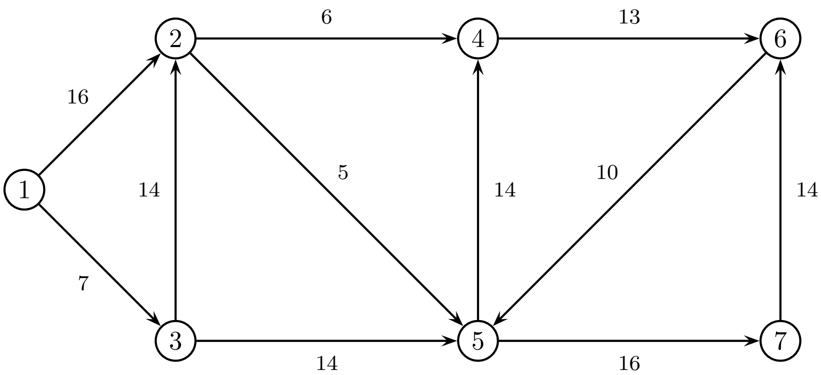
| | |
|---|---|
| $r = 1$ | $x_1 \leq 2$ |
| $r = 4$ | $3\,x_1 + x_2 \leq 8$ |

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 5 | | 4 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 |
| nodo 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 24 | 2 | 22 | 5 | 22 | 5 | 22 | 5 | 22 | 5 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 19 | 3 | 10 | 2 | 10 | 2 | 10 | 2 | 10 | 2 | 10 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 41 | 4 | 40 | 7 | 40 | 7 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 26 | 5 | 26 | 5 | 26 | 5 | 26 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 2, 5 | | 4, 5 | | 4, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 5 | (5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0) | 5 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 7 | (5, 7, 0, 5, 0, 7, 0, 0, 12, 0, 0) | 12 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7 | 4 | (9, 7, 4, 5, 0, 7, 4, 0, 16, 4, 0) | 16 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di caricare un contenitore di volume pari a 571 decimetri cubici, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 21 | 17 | 18 | 11 | 8 | 12 | 24 |
| Volumi | 256 | 411 | 447 | 108 | 228 | 26 | 289 |

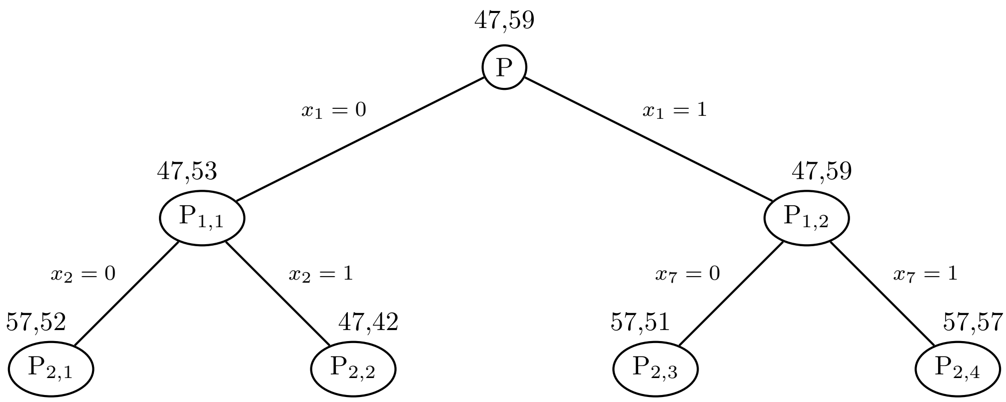
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (0,0,0,1,0,1,1)$ $\qquad v_I(P) = 47$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{37}{64}, 0,0,1,0,1,1\right)$ $\qquad v_S(P) = 59$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound.* Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (1,0,0,0,0,1,1)$ $\qquad$ valore ottimo $= 57$

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1,x_2) = -x_1 + 3x_2^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0, \quad x_1 + (0.25)x_2^2 - 1 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(1,\ 0)$ | $(0,1)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(-2,\ 0)$ | $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0,\ 2)$ | $\left(-\frac{13}{4},1\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0,\ -2)$ | $\left(-\frac{13}{4},1\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-\frac{1}{6},\ \frac{\sqrt{143}}{6}\right)$ | $(-3,0)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |
| $\left(-\frac{1}{6},\ -\frac{\sqrt{143}}{6}\right)$ | $(-3,0)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 8.**

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\frac{11}{3},\frac{4}{3})$ | $(2,-1)$ | $\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ | $\left(\frac{53}{3},\frac{106}{3}\right)$ ((1,2) | $\frac{1}{53}$ ($\frac{1}{3}$ ) | $\frac{1}{53}$ ($\frac{1}{3}$) | $(4,2)$ |