Esame di Ricerca Operativa del 02/09/15

(Cognome) **(Nome)** **(Corso di laurea)**

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\ x_1 - 9\ x_2 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq 4 \\ -6\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 4\ x_1 + 3\ x_2 \leq 26 \\ -2\ x_1 + 3\ x_2 \leq 14 \\ 6\ x_1 - x_2 \leq 28 \\ 5\ x_1 + x_2 \leq 27 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{5, 6}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,4}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una fabbrica produce scarpe e scarponi. Il costo ed il ricavo sono dati in euro nella seguente tabella.

	scarpe	scarponi
costo produzione	18	22
prezzo vendita	40	46

L'azienda dispone di un budget mensile pari a 66.000 euro. La produzione di cento paia (scarpe o scarponi) richiede l'utilizzo dell'impianto per 10 ore. L'impianto è disponibile 12 ore la giorno. Stabilire la produzione mensile che massimizzi il profitto.

variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

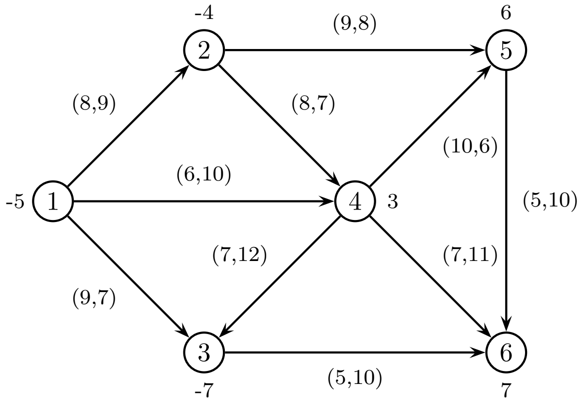
```
c=

A=                                    b=

Aeq=                                  beq=

lb=                                   ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

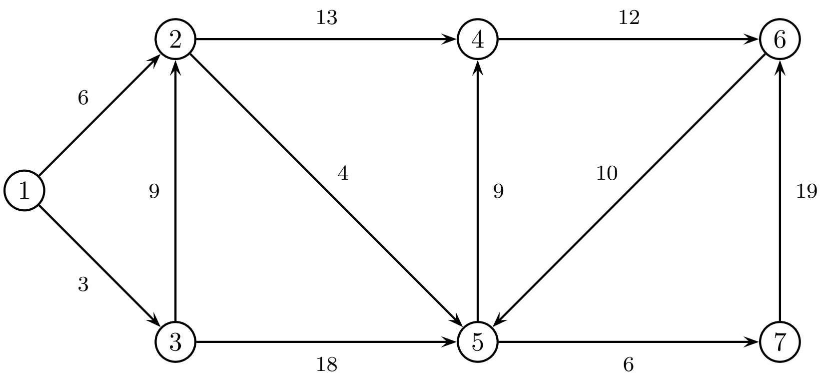


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (3,6) (4,5) (4,6)	(2,5)	$x =$		
(1,2) (1,4) (2,5) (4,3) (5,6)	(4,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

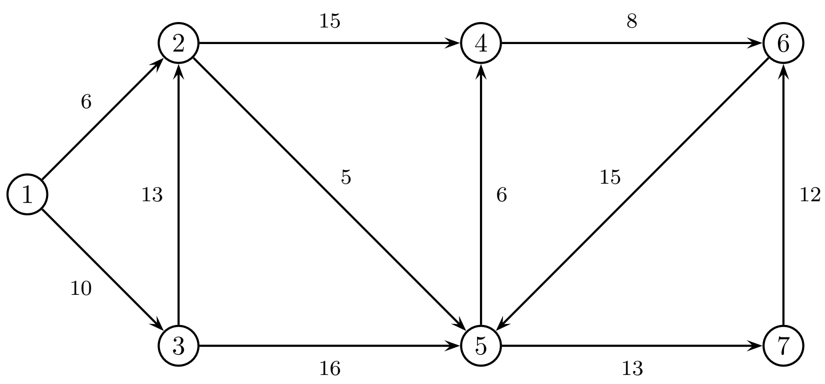
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,5) (3,6) (4,3) (4,5)	
Archi di U	(2,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \\ 17\ x_1 + 9\ x_2 \leq 49 \\ 9\ x_1 + 12\ x_2 \leq 64 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	41	62	92
2		27	54	56
3			11	13
4				94

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{35}, x_{15}.

Esercizio 9. Studiare i punti stazionari della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ -2)$							
$(0,\ -1)$							
$\left(\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$							
$\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$							
$(0,\ 1)$							
$(0,\ 2)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\ x_1^2 + 10\ x_1\, x_2 - 4\ x_2^2 - 5\ x_1 + 4\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(1, -2)$, $(3, 1)$, $(-2, 3)$ e $(-3, -2)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{5}{3}, -2\right)$					

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\,x_1 - 9\,x_2 \\ -x_1 - 2\,x_2 \le 4 \\ -6\,x_1 - x_2 \le 2 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 \le 26 \\ -2\,x_1 + 3\,x_2 \le 14 \\ 6\,x_1 - x_2 \le 28 \\ 5\,x_1 + x_2 \le 27 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (0,\ -2)$	SI	NO
$\{5,\ 6\}$	$y = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{53}{11},\ -\frac{46}{11}\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{3,\ 4\}$	$(2,\ 6)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ -\frac{10}{3},\ 0,\ 0\right)$	4	$\frac{324}{5},\ 18,\ 18$	5
2° iterazione	$\{3,\ 5\}$	$(5,\ 2)$	$\left(0,\ 0,\ -\frac{23}{11},\ 0,\ \frac{30}{11},\ 0\right)$	3	$22,\ \frac{187}{3}$	1

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

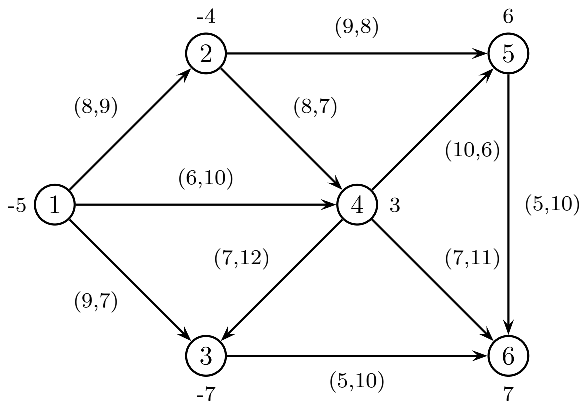
```
c=[-22;-24]

A=[18 22 ; 1 1 ]              b=[ 66000 ; 3600 ]

Aeq=[]                        beq=[]

lb=[0 ; 0]                    ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

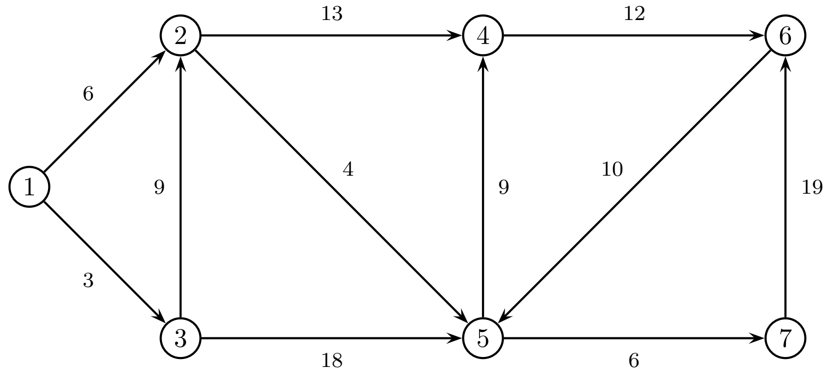


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (3,6) (4,5) (4,6)	(2,5)	$x = (4,\ 0,\ 1,\ 0,\ 8,\ 7,\ 0,\ -2,\ 0,\ 0)$	NO	SI
(1,2) (1,4) (2,5) (4,3) (5,6)	(4,5)	$\pi = (0,\ 8,\ 13,\ 6,\ 17,\ 22)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

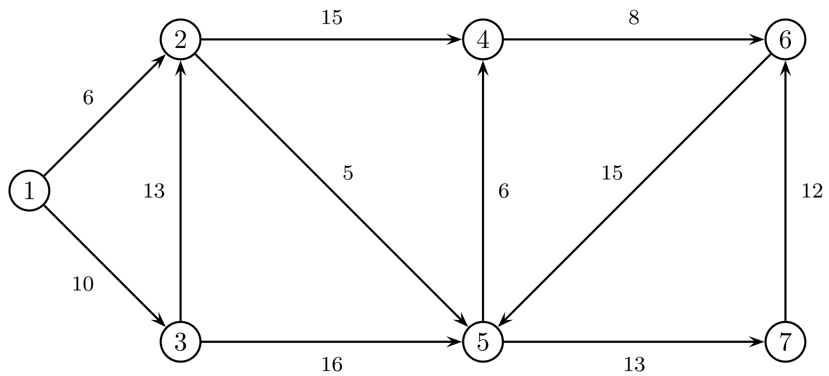
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,5) (3,6) (4,3) (4,5)	(1,2) (1,3) (2,5) (3,6) (4,5)
Archi di U	(2,4)	(2,4)
x	(5, 0, 0, 7, 2, 7, 0, 4, 0, 0)	(5, 0, 0, 7, 2, 7, 0, 4, 0, 0)
π	(0, 8, 14, 7, 17, 19)	(0, 8, 9, 7, 17, 14)
Arco entrante	(1,3)	(1,4)
ϑ^+, ϑ^-	2 , 0	2 , 2
Arco uscente	(4,3)	(2,5)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		7		4		6	
nodo 2	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 3	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	19	2	19	2	19	2	19	2	19	2
nodo 5	$+\infty$	-1	21	3	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	35	7	31	4	31	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	16	5	16	5	16	5	16	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		4, 6		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	5	(5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0)	5
1 - 3 - 5 - 7	8	(5, 8, 0, 5, 0, 8, 0, 0, 13, 0, 0)	13

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \\ 17\ x_1 + 9\ x_2 \leq 49 \\ 9\ x_1 + 12\ x_2 \leq 64 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \dfrac{16}{3}\right)$ $v_S(P) = 74$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(0, 5)$ $v_I(P) = 70$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $x_2 \leq 5$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	41	62	92
2		27	54	56
3			11	13
4				94

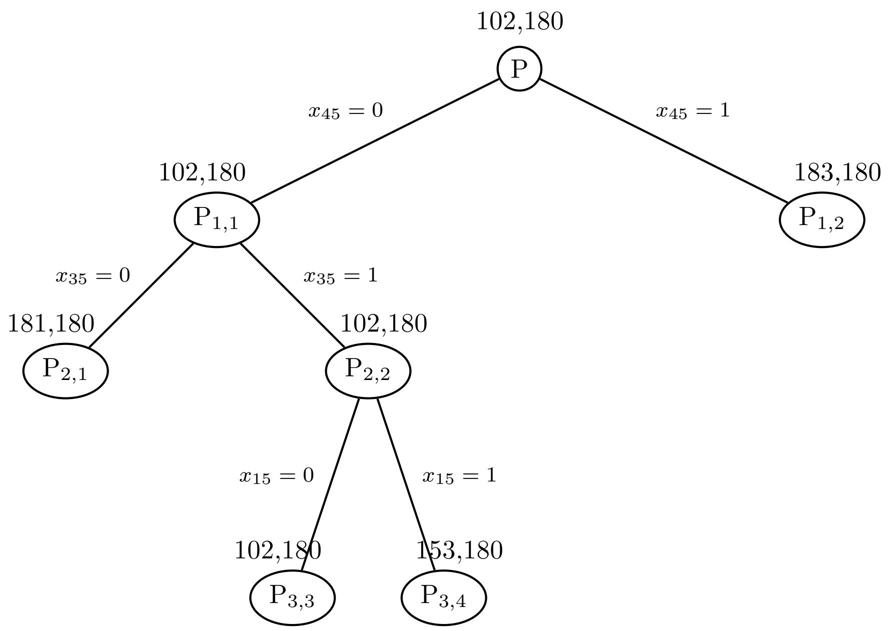
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: (1 , 2) (1 , 3) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) $v_I(P) = 102$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo: 5 – 3 – 4 – 2 – 1 $v_S(P) = 180$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{35}, x_{15}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ -2)$	$(0,16)$		NO	NO	NO	SI	NO
$(0,\ -1)$	$(-6,0)$		NO	SI	NO	NO	NO
$\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$	$(0,1)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$	$(0,1)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(0,\ 1)$	$(2,0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(0,\ 2)$	$(0,0)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\ x_1^2 + 10\ x_1\, x_2 - 4\ x_2^2 - 5\ x_1 + 4\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(1,-2)$, $(3,1)$, $(-2,3)$ e $(-3,-2)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{5}{3},-2\right)$	$-\frac{55}{3}\,x_1 + \frac{10}{3}\,x_2$	$(3\ ,1)$	$\left(\frac{14}{3},3\right)$	$\dfrac{5}{8}$	$\left(\dfrac{5}{4},-\dfrac{1}{8}\right)$