

(Cognome)

(Nome)

(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max & -x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq -5 \\ & x_1 \leq 5 \\ & -x_1 - x_2 \leq 6 \\ & -2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq -7 \\ & x_1 - x_2 \leq 12 \\ & -x_2 \leq 9 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenerare (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{4, 7}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,7}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta produce latte liquido e in polvere. Il latte liquido viene venduto in cartocci da 1 l, ciascuno dei quali occupa un volume di $0.002 m^3$. Il profitto ottenuto dalla vendita di 1 l di latte è di 1.20 Euro. Il latte in polvere viene venduto in barattoli da 2, 1.5 e 1 kg rispettivamente. Il costo che la ditta sostiene per la produzione di 1 kg di latte in polvere è di 5 Euro. La seguente tabella riporta i prezzi di vendita dei barattoli e i volumi occupati:

Barattolo	Prezzo (Euro)	Volume occupato (m^3)
2 kg	24	0.004
1.5 kg	16	0.003
1 kg	12	0.002

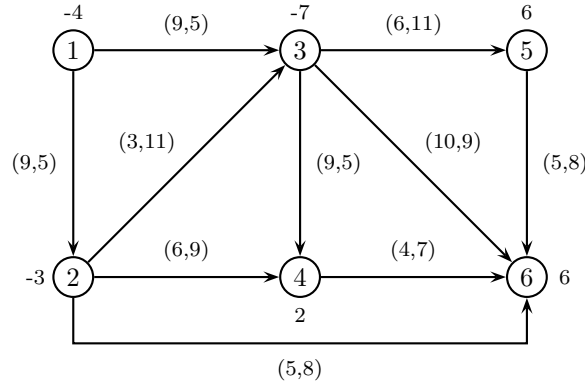
La ditta deve soddisfare la domanda di mercato stimata in 600 l di latte liquido e 200 kg di latte in polvere. Il latte prodotto sarà trasportato con un veicolo a temperatura controllata di capacità $28.3 m^3$. Determinare quante unità dei diversi tipi di latte la ditta deve produrre per massimizzare il profitto e soddisfare le richieste di mercato.

variabili decisionali:

modello:

c=	int=
A=	b=
Aeq=	beq=
lb=	ub=

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

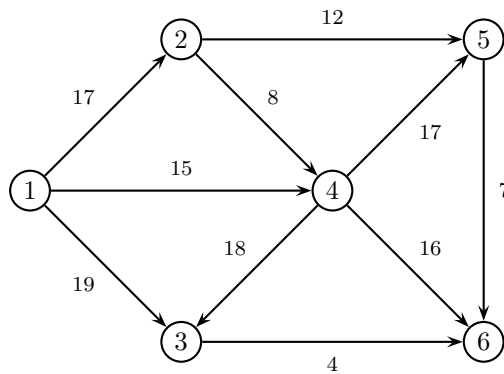


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenerare (si/no)
(1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (5,6)	(3,6)	$x =$		
(1,2) (1,3) (3,4) (3,6) (5,6)	(3,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

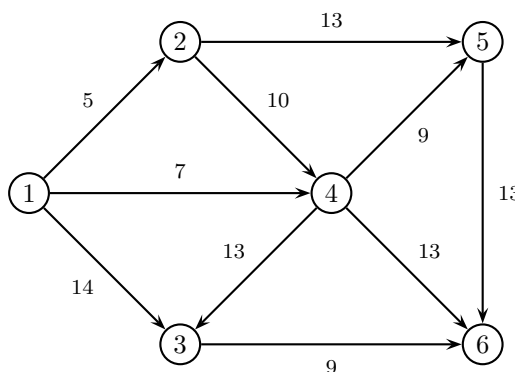
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,3) (2,4) (2,6) (5,6)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato												
nodo 2												
nodo 3												
nodo 4												
nodo 5												
nodo 6												
insieme Q												

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min 14x_1 + 12x_2 \\ 13x_1 + 8x_2 \geq 46 \\ 11x_1 + 16x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	16	21	64	46
2		16	99	58
3			98	11
4				10

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2-albero di costo minimo.

2-albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24} , x_{45} , x_{34} . Dire se l'algoritmo é terminato.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1^2 - (x_2 - 1)^2 + 1 \leq 0, \quad -x_1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$							
(0, 0)							
(0, 2)							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min & -4 x_1^2 - 4 x_1 x_2 + 5 x_1 + 9 x_2 \\ & x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-2, 3)$, $(1, 1)$, $(0, -4)$ e $(-2, -2)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-1, \frac{7}{3}\right)$					

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max -x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq -5 \\ x_1 \leq 5 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -2x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -x_2 \leq 9 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
{1, 2}	$x = (5, -5)$	SI	NO
{4, 7}	$y = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{3}{2}\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscite	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3, 7}	(3, -9)	(0, 0, 1, 0, 0, 0, -2)	7	10, 1, $\frac{5}{2}$	4
2° iterazione	{3, 4}	(2, -8)	(0, 0, -3, 2, 0, 0, 0)	3	3, 1	5

Esercizio 3. Una ditta produce latte liquido e in polvere. Il latte liquido viene venduto in cartocci da 1 l, ciascuno dei quali occupa un volume di $0.002 m^3$. Il profitto ottenuto dalla vendita di 1 l di latte è di 1.20 Euro. Il latte in polvere viene venduto in barattoli da 2, 1.5 e 1 kg rispettivamente. Il costo che la ditta sostiene per la produzione di 1 kg di latte in polvere è di 5 Euro. La seguente tabella riporta i prezzi di vendita dei barattoli e i volumi occupati:

Barattolo	Prezzo (Euro)	Volume occupato (m^3)
2 kg	24	0.004
1.5 kg	16	0.003
1 kg	12	0.002

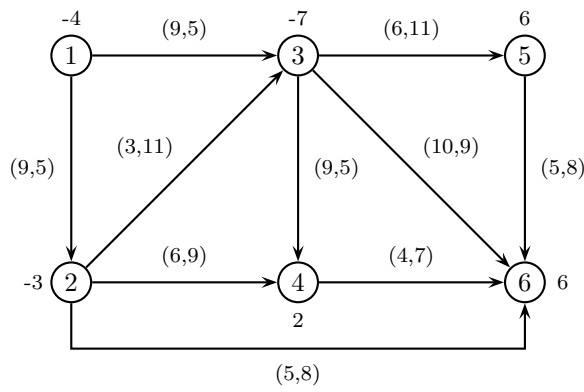
La ditta deve soddisfare la domanda di mercato stimata in 600 l di latte liquido e 200 kg di latte in polvere. Il latte prodotto sarà trasportato con un veicolo a temperatura controllata di capacità $28.3 m^3$. Determinare quante unità dei diversi tipi di latte la ditta deve produrre per massimizzare il profitto e soddisfare le richieste di mercato (ignorare il vincolo di interezza).

<p>variabili decisionali: x_1 = numero di cartocci di latte prodotti x_2 = numero di barattoli di latte da 2 kg x_3 = numero di barattoli di latte da 1.5 kg x_4 = numero di barattoli di latte da 1 kg</p> <p>modello: $\begin{cases} \max 1.2 x_1 + 24 x_2 + 16 x_3 + 12 x_4 - 5 (2 x_2 + 1.5 x_3 + x_4) \\ x_1 \geq 600 \\ 2 x_2 + 1.5 x_3 + x_4 \geq 200 \\ 0.002 x_1 + 0.004 x_2 + 0.003 x_3 + 0.002 x_4 \leq 28.3 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$</p>
--

COMANDI DI MATLAB

$c = [-1.2; -14; -8.5; -7]$	
$A = [0 \ -2 \ -1.5 \ -1; \ 0.002 \ 0.004 \ 0.003 \ 0.002]$	$b = [-200; \ 28.3]$
$Aeq = []$	$beq = []$
$lb = [600; \ 0; \ 0; \ 0]$	$ub = []$

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

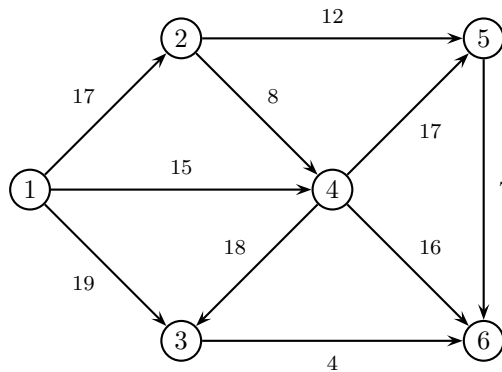


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenerare (si/no)
(1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (5,6)	(3,6)	$x = (-3, 7, 0, 0, 0, 2, 3, 9, 0, -3)$	NO	NO
(1,2) (1,3) (3,4) (3,6) (5,6)	(3,5)	$\pi = (0, 9, 9, 18, 14, 19)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

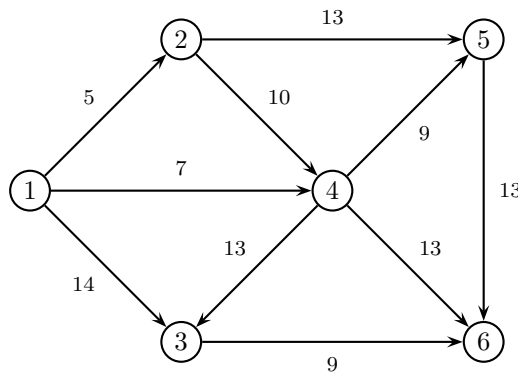
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,3) (2,4) (2,6) (5,6)	(1,3) (2,4) (2,6) (3,5) (5,6)
Archi di U	(3,5)	
x	(0, 4, 0, 2, 1, 0, 11, 0, 0, 5)	(0, 4, 0, 2, 1, 0, 11, 0, 0, 5)
π	(0, 6, 9, 12, 6, 11)	(0, 15, 9, 21, 15, 20)
Arco entrante	(3,5)	(1,2)
ϑ^+, ϑ^-	7, 0	5, 4
Arco uscente	(2,3)	(1,3)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		2		3		6		5	
nodo 2	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1
nodo 3	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1
nodo 4	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 5	$+\infty$	-1	32	4	29	2	29	2	29	2	29	2
nodo 6	$+\infty$	-1	31	4	31	4	23	3	23	3	23	3
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 5, 6		3, 5, 6		5, 6		5		\emptyset	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 6	9	(0, 9, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0)	9
1 - 4 - 6	7	(0, 9, 7, 0, 0, 9, 0, 0, 7, 0)	16
1 - 2 - 4 - 6	5	(5, 9, 7, 5, 0, 9, 0, 0, 12, 0)	21

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 3\}$ $N_t = \{2, 4, 5, 6\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min 14x_1 + 12x_2 \\ 13x_1 + 8x_2 \geq 46 \\ 11x_1 + 16x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{17}{5}, \frac{9}{40}\right)$ $v_I(P) = 51$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = (4, 1) $v_S(P) = 68$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$$\begin{array}{l} r = 1 \quad 12x_1 + 8x_2 \geq 43 \\ r = 2 \quad 11x_1 + 15x_2 \geq 41 \end{array}$$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	16	21	64	46
2		16	99	58
3			98	11
4				10

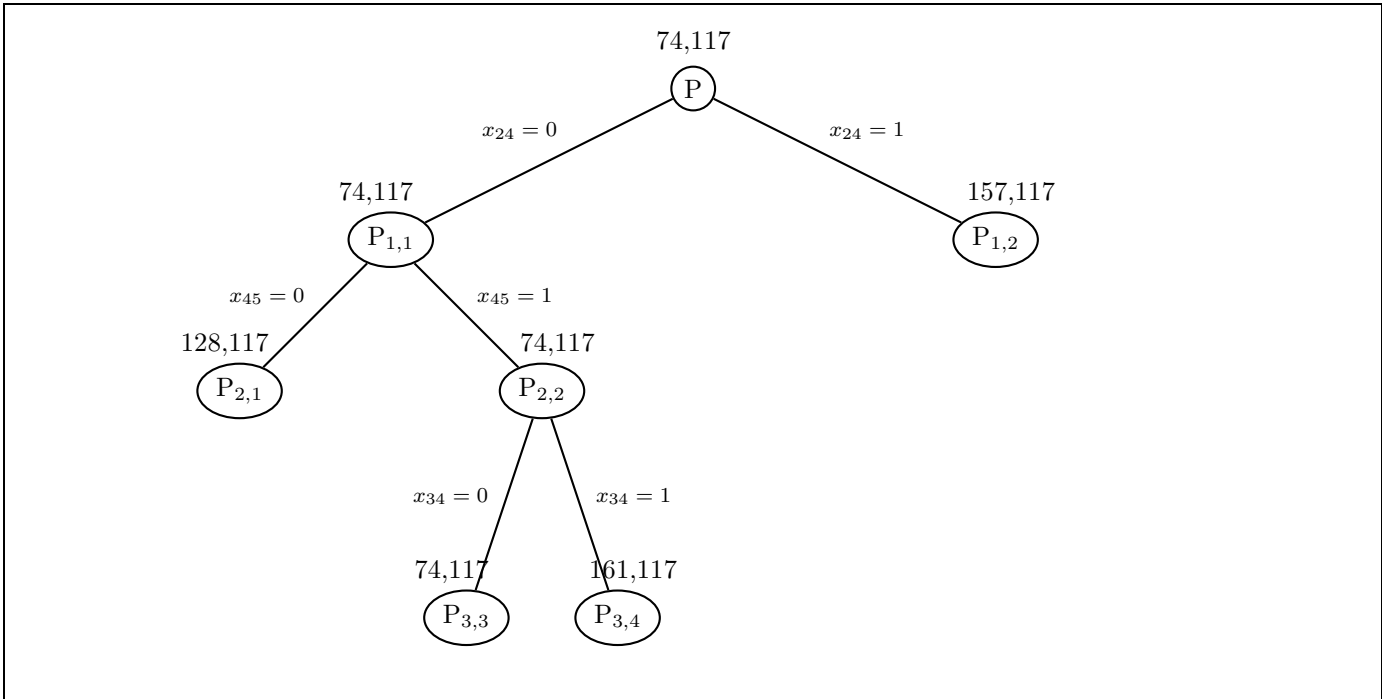
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2-albero di costo minimo.

2-albero: (1, 2) (1, 3) (2, 3) (3, 5) (4, 5) $v_I(P) = 74$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: 1 - 2 - 3 - 5 - 4 $v_S(P) = 117$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24} , x_{45} , x_{34} .



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1^2 - (x_2 - 1)^2 + 1 \leq 0, \quad -x_1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$(-1, 0)$		NO	SI	NO	NO	NO
$(0, 0)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$		NO	SI	NO	NO	NO
$(0, 2)$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$		NO	NO	NO	NO	SI

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min & -4x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_1 + 9x_2 \\ & x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-2, 3)$, $(1, 1)$, $(0, -4)$ e $(-2, -2)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-1, \frac{7}{3}\right)$	$\frac{11}{3}x_1 + 13x_2$	$(0, -4)$	$\left(1, -\frac{19}{3}\right)$	1	$(0, -4)$