Esame di Ricerca Operativa del 05/11/16

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. Un mobilificio produce tavoli, sedie e letti utilizzando come materie prime ebano e compensato. La disponibilita' di materie prime e le quantita' utilizzate per la produzione di ciascuno degli oggetti prodotti sono indicate (in kg) nella seguente tabella insieme al ricavo unitario (in euro) derivante dalla loro vendita:

	Tavoli	Sedie	Letti	Disponibilita'
Ebano	6	5	4	900
Compensato	4	2	10	700
Ricavo (unitario)	100	30	80	

Inoltre, e' necessario l'impiego di una macchina disponibile per 600 ore e per la produzione di ogni tavolo, sedia e letto sono necessarie 4, 5 e 3 ore rispettivamente. Per esigenze di cararattere commerciale, si richiede che la quantita' di sedie prodotte sia pari ad almeno il doppio dei tavoli e costituisca non piu' del 30% della produzione complessiva.

a) Scrivere un problema di programmazione lineare intera per determinare le quantita' ottimali da produrre in modo da massimizzare il ricavo complessivo.

variabili decisionali:

modello:

b) Trasformare il problema del punto a) nella forma primale standard

$$\begin{cases} \max\ c^\top x \\ Ax \le b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Scrivere la matrice A ed i vettori b e c.

$A =$ $b =$ $c =$

c) Dimostrare che il problema di programmazione lineare definito nel modello ammette ottimo finito.

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -8\ y_1 - 6\ y_2 + 4\ y_3 + 12\ y_4 + 4\ y_5 + 6\ y_6 + 10\ y_7 \\ -2\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 2\ y_5 - y_6 = 1 \\ y_1 + 2\ y_2 - y_4 - y_5 - y_6 - y_7 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{1, 6}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{4,7}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema:

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\ x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq -8 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 10 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{5,6}					
2° iterazione						

Esercizio 5. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 14\ x_1 + 8\ x_2 \\ 11\ x_1 + 10\ x_2 \geq 54 \\ 10\ x_1 + 13\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

SOLUZIONI

Esercizio 1

a) Variabili decisionali:
x_1 = quantita' di tavoli prodotti; x_2 = quantita' di sedie prodotte; x_3 = quantita' di letti prodotti;

Modello:

$$\begin{cases} \max\ (100x_1 + 30x_2 + 80x_3) \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 900 \\ 4x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 700 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 600 \\ x_2 \geq 2x_1 \\ x_2 \leq 0.3(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3, \quad x \in \mathbb{Z}^3 \end{cases}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 10 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -0.3 & 0.7 & -0.3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 900 \\ 700 \\ 600 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \\ 80 \end{pmatrix}$$

c) Si osservi che la regione ammissibile del problema e' non vuota essendo la soluzione $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ammissibile. Inoltre, essendo le variabili non negative, dalla prima equazione vincolare segue che: $6x_1 \leq 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 900$ da cui $0 \leq x_1 \leq 150$, analogamente otteniamo che $5x_2 \leq 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 900$ da cui $0 \leq x_2 \leq 180$ e $4x_3 \leq 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 900$ da cui $0 \leq x_3 \leq 225$. Pertanto la regione ammissibile del problema e' limitata da cui segue che il problema ammette una soluzione ottima.

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -8\ y_1 - 6\ y_2 + 4\ y_3 + 12\ y_4 + 4\ y_5 + 6\ y_6 + 10\ y_7 \\ -2\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 2\ y_5 - y_6 = 1 \\ y_1 + 2\ y_2 - y_4 - y_5 - y_6 - y_7 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (2,\ -4)$	SI	NO
$\{1,\ 6\}$	$y = \left(-\frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{4,\ 7\}$	$(2,\ -10)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$	5	0	7
2° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$\left(\frac{8}{3},\ -\frac{28}{3}\right)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$	6	3, 0	5

Esercizio 4. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema:

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\ x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq -8 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 10 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{5,\ 6\}$	$(2,\ -8)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ -5,\ 0)$	6	$1,\ \frac{8}{3}$	1
2° iterazione	$\{1,\ 5\}$	$(1,\ -6)$	$\left(\frac{5}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{7}{4},\ 0,\ 0\right)$	5	$4,\ 12$	2

Esercizio 5. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 14\ x_1 + 8\ x_2 \\ 11\ x_1 + 10\ x_2 \geq 54 \\ 10\ x_1 + 13\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \frac{27}{5}\right)$	$v_I(P) = 44$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 6)$	$v_S(P) = 48$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$	$10\, x_1 + 9\, x_2 \geq 49$
$r = 4$	$8\, x_1 + 7\, x_2 \geq 38$