Esame di Ricerca Operativa del 05/11/16

(Cognome) (Nome) (Numero di Matricola)

Esercizio 1. Un mobilificio produce tavoli, sedie e letti utilizzando come materie prime ebano e compensato. La disponibilita' di materie prime e le quantita' utilizzate per la produzione di ciascuno degli oggetti prodotti sono indicate (in kg) nella seguente tabella insieme al ricavo unitario (in euro) derivante dalla loro vendita:

	Tavoli	Sedie	Letti	Disponibilita'
Ebano	6	5	4	1000
Compensato	4	2	10	800
Ricavo (unitario)	100	30	80	

Inoltre, e' necessario l'impiego di una macchina disponibile per 500 ore e per la produzione di ogni tavolo, sedia e letto sono necessarie 4, 5 e 3 ore rispettivamente. Per esigenze di cararattere commerciale, si richiede che la quantita' di sedie prodotte sia pari ad almeno il doppio dei tavoli e costituisca non piu' del 40% della produzione complessiva.

a) Scrivere un problema di programmazione lineare intera per determinare le quantita' ottimali da produrre in modo da massimizzare il ricavo complessivo.

variabili decisionali:

modello:

b) Trasformare il problema del punto a) nella forma primale standard

$$\begin{cases} \max\ c^\top x \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Scrivere la matrice A ed i vettori b e c.

$A =$ $b =$ $c =$

c) Dimostrare che il problema di programmazione lineare definito nel modello ammette ottimo finito.

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 2\ x_1 + 7\ x_2 \\ 8\ x_1 - x_2 \leq 40 \\ x_2 \leq 0 \\ -x_2 \leq 8 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -3\ x_1 + x_2 \leq -9 \\ -x_1 \leq -1 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{2, 6\}$	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{5,6}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema:

$$\begin{cases} \min\ -8\ y_1 - 6\ y_2 + 4\ y_3 + 12\ y_4 + 4\ y_5 + 6\ y_6 + 10\ y_7 \\ -2\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 2\ y_5 - y_6 - 3\ y_7 = -9 \\ y_1 + 2\ y_2 - y_4 - y_5 - y_6 - 2\ y_7 = -5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{1,4}					
2° iterazione						

Esercizio 5. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 9\ x_2 \\ 14\ x_1 + 6\ x_2 \geq 41 \\ 7\ x_1 + 10\ x_2 \geq 50 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Variabili decisionali:

$x_1 =$ quantita' di tavoli prodotti; $x_2 =$ quantita' di sedie prodotte; $x_3 =$ quantita' di letti prodotti;

Modello:

$$\begin{cases} \max\ (100x_1 + 30x_2 + 80x_3) \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 1000 \\ 4x_1 + 2x_2 + 10x_3 \le 800 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 500 \\ x_2 \ge 2x_1 \\ x_2 \le 0.4(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3, \quad x \in \mathbb{Z}^3 \end{cases}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 10 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -0.4 & 0.6 & -0.4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \\ 80 \end{pmatrix}$$

c) Si osservi che la regione ammissibile del problema e' non vuota essendo la soluzione $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ammissibile. Inoltre, essendo le variabili non negative, dalla prima equazione vincolare segue che: $6x_1 \le 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 1000$ da cui $0 \le x_1 \le \frac{500}{3}$, analogamente otteniamo che $5x_2 \le 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 1000$ da cui $0 \le x_2 \le 200$ e $4x_3 \le 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 1000$ da cui $0 \le x_3 \le 250$. Pertanto la regione ammissibile del problema e' limitata da cui segue che il problema ammette una soluzione ottima.

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 2\ x_1 + 7\ x_2 \\ 8\ x_1 - x_2 \le 40 \\ x_2 \le 0 \\ -x_2 \le 8 \\ -2\ x_1 - x_2 \le 4 \\ -3\ x_1 + x_2 \le -9 \\ -x_1 \le -1 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (5,\ 0)$	SI	NO
$\{2,\ 6\}$	$y = (0,\ 7,\ 0,\ 0,\ 0,\ -2)$	NO	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{5,\ 6\}$	$(1,\ -6)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 7,\ -23)$	6	$\frac{26}{5},\ 2$	2
2° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(3,\ 0)$	$\left(0,\ \frac{23}{3},\ 0,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0\right)$	5	6	1

Esercizio 4.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{1,\ 4\}$	$(-4,\ -16)$	$(14,\ 0,\ 0,\ 19,\ 0,\ 0,\ 0)$	5	$\frac{14}{3},\ \frac{19}{4}$	1
2° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$\left(\frac{8}{3},\ -\frac{28}{3}\right)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{14}{3},\ 0,\ 0\right)$	6	1, 7	4

Esercizio 5. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 9\ x_2 \\ 14\ x_1 + 6\ x_2 \geq 41 \\ 7\ x_1 + 10\ x_2 \geq 50 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\dfrac{50}{7}, 0\right)$	$v_I(P) = 43$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (8, 0)$	$v_S(P) = 48$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$	$6\,x_1 + 9\,x_2 \geq 43$