Terza prova di Ricerca Operativa

Esercizio 1. Sia dato il seguente problema di bin-packing:

j	1	2	3	4	5	6	7	
p_j	79	93	24	45	40	23	47	$C = 100$

a) Scrivere un modello matematico per determinare il minimo numero di contenitori necessari.
b) Calcolare una valutazione inferiore tramite rilassamento continuo e una superiore tramite gli algoritmi del First-Fit decreasing, del Next-Fit decreasing e del Best-Fit decreasing.
c) Scrivere i comandi Matlab per ottenere la soluzione ottima.

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze sono indicate in tabella:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	29	24	28	47
2		18	94	61
3			53	26
4				20

a) Scrivere un modello matematico che determini il ciclo hamiltoniano di costo minimo.
b) Trovare una valutazione inferiore calcolando il 3–albero di costo minimo ed una superiore applicando prima l'algoritmo del nodo piú vicino dal nodo 3 e poi un algoritmo di inserimento partendo da un ciclo a 3 nodi.
c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{13} e x_{23}.

Esercizio 3. Una ditta produce tre tipi di piastrelle (P1, P2, P3) utilizzando tre diversi materiali (M1, M2, M3). La seguente tabella riporta le quantitá (in Kg) di ciascuna materiale richiesto per produrre una piastrella e la quantitá massima (in Kg) di ciascuna materiale che si puó acquistare mensilmente:

	M1	M2	M3
P1	0.2	0.8	0.4
P2	0.4	0.2	0.3
P3	0.3	0.1	0.2
quantitá massima	3000	1500	4000

Sono riportate le ore necessarie per la produzione, i prezzi di vendita e le quantitá minime da produrre:

	P1	P2	P3
ore lavorative	1	0.8	0.5
prezzo di vendita	24	20	12
quantitá minime	1000	2000	1200

Bisogna tener conto che il numero di ore impiegate per la lavorazione della piastrella P1 non deve superare il 30% del totale delle ore necessarie per la lavorazione di tutte le piastrelle fabbricate.

a) Scrivere un modello matematico che determini la produzione mensile in modo da massimizzare il ricavo e scrivere i comandi Matlab per ottenere la soluzione ottima.
b) Il simplesso puó partire dalla soluzione $x = (0, 0, 0)$? Se no trovare un vertice da cui possa partire il simplesso.
c) Sapendo che la soluzione ottima é $x = (1000, 2000, 3000)$, per aumentare il guadagno sarebbe meglio comprare piú materiale $M1$ o $M2$ o $M3$?

Esercizio 4. Sono riportate le distanze reciproche tra 8 cittá ed il costo per costruire una stazione dei vigili del fuoco in ognuna delle 8 cittá:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	26	31	35	19	17	13	23
2	26	0	25	18	17	23	14	34
3	31	25	0	19	11	17	33	19
4	35	18	19	0	25	22	16	17
5	19	17	11	25	0	28	34	10
6	17	23	17	22	28	0	15	28
7	13	14	33	16	34	15	0	23
8	23	34	19	17	10	28	23	0

Cittá	Costo di costruzione
1	3
2	2
3	4
4	5
5	4
6	7
7	3
8	5

In ogni cittá dobbiamo decidere se costruire o no una stazione dei vigili del fuoco, in modo che per ogni cittá esista almeno una stazione distante al piú 20 km, minimizzando il costo totale.

a) Scrivere un modello matematico per minimizzare il costo totale di costruzione.
b) Scrivere i comandi Matlab dopo aver applicato l'algoritmo di riduzione.
c) Determinare una valutazione superiore e dire se quella trovata é generata da un vertice.

SOLUZIONI

Esercizio 2. b)

3–albero: (1 , 2) (1 , 3) (1 , 4) (2 , 3) (4 , 5)	$v_I(P) = 119$
ciclo: 3 – 2 – 1 – 4 – 5	$v_S(P) = 121$

$v_I(P11) = 121$ taglio; $v_I(P23) = 127$ taglio; $v_I(P24) = 119$ non taglio.

Esercizio 3.

variabili decisionali: x_i = numero di piastrelle di tipo i prodotte, con $i = 1, 2, 3$.

modello:
$$\begin{cases} \max\ 24\ x_1 + 20\ x_2 + 12\ x_3 \\ 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2 + 0.3\ x_3 \leq 3000 \\ 0.8\ x_1 + 0.2\ x_2 + 0.1\ x_3 \leq 1500 \\ 0.4\ x_1 + 0.3\ x_2 + 0.2\ x_3 \leq 4000 \\ x_1 \leq 0.3\ (x_1 + 0.8\ x_2 + 0.5\ x_3) \\ x_1 \geq 1000 \\ x_2 \geq 2000 \\ x_3 \geq 1200,\ x\ \textit{intere} \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

`c=-[24;20;12]`	`intcon=[1 2 3]`
`A=[0.2 0.4 0.3;0.8 0.2 0.1;0.4 0.3 0.2; 0.7 -0.24 -0.15]`	`b=[3000;1500;4000;0]`
`Aeq=[]`	`beq=[]`
`lb=[1000; 2000; 1200]`	`ub=[]`

Calcolando gli scarti abbiamo: (1100,0,2400) e quindi conviene acquistare il materiale M_2.

$(0, 0, 0)$ non é ammissibile quindi non é un vertice. Un possibile vertice é $x = (1000, 2000, 1466.666)$.

Esercizio 4. La formulazione del problema é la seguente:

$$\begin{cases} \min 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 7x_6 + 3x_7 + 5x_8 \\ x_1 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + x_8 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_8 \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_8 \geq 1 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, 8 \end{cases}$$

E' possibile effettuare una riduzione del problema: si ha che $A^6 \leq A^1 + A^3$ e che $c_6 = c_1 + c_3$, possiamo fissare la variabile $x_6 = 0$ ed eliminare la colonna 6. $A^8 \leq A^3$ e $c_8 > c_3$, quindi $x_8 = 0$ ed eliminiamo la colonna 8; infine le righe 3 e 8 sono uguali, pertanto si puó eliminare la riga 8:

c_j	3	2	4	5	4	3
$i \backslash j$	1	2	3	4	5	7
1	1	0	0	0	1	1
2	0	1	0	1	1	1
3	0	0	1	1	1	0
4	0	1	1	1	0	1
5	1	1	1	0	1	0
6	1	0	1	0	0	1
7	1	1	0	1	0	1

Una v_S greedy é data da $x = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ di valore 9 che é un vertice con la base $B = \{1, 2, 3, 12, 13, 14, 15, 16\}$ (anche l'indice 8 potrebbe essere in base).

Le soluzioni ottime del problema (PC) iniziale sono $x^1 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$ e $x^2 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$ di costo 7.