Esame di Ricerca Operativa del 12/07/17

(Cognome) (Nome) (Numero di Matricola)

Esercizio 1. Un'azienda produttrice di mobili possiede due sedi S_1 e S_2, che richiedono mensilmente 30 e 40 quintali di legname per il processo produttivo. Il legname è conservato in tre depositi D_1, D_2, D_3, di proprietà dell'azienda, nelle quantità di 20, 25 e 35 quintali, rispettivamente. Nella seguente tabella sono riportati i costi di trasporto (in euro per quintale) del legname, dal deposito D_i alla sede S_j, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$.

	S_1	S_2
D_1	10	8
D_2	6	12
D_3	14	10

Sapendo che il costo di giacenza mensile del legname nei depositi D_1, D_2 e D_3 é di 3, 4 e 2 euro a quintale, rispettivamente, si formuli un problema di programmazione lineare per minimizzare il costo complessivo mensile di trasferimento del legname richiesto dalle sedi e di giacenza del legname rimanente nei depositi.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

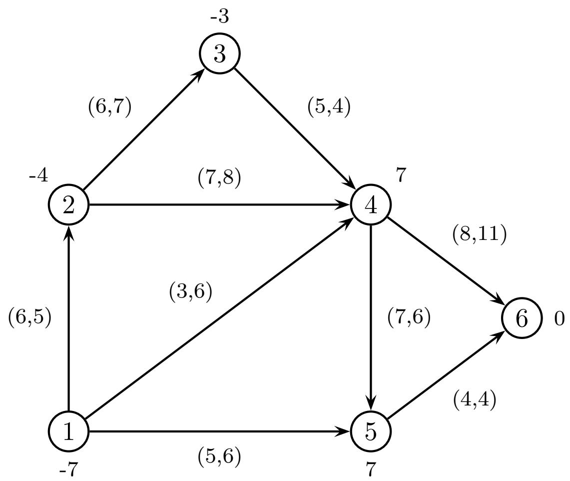
$$\begin{cases} \max\ 2\,x_1 - 3\,x_2 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -2\,x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq -5 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{1, 3}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2,4}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

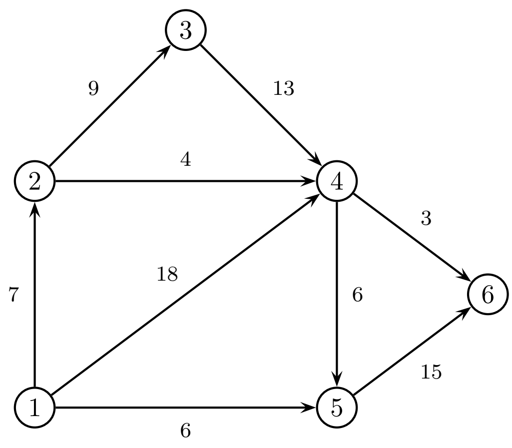


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,5) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6)	(2,3)	$x =$		
(1,5) (2,3) (2,4) (4,5) (5,6)	(3,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

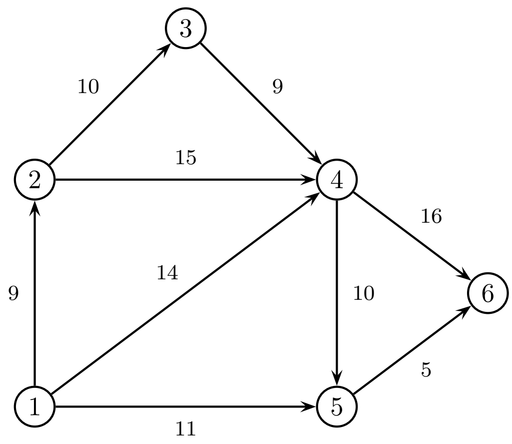
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,5) (3,4) (4,5) (4,6)	
Archi di U	(2,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato												
nodo 2												
nodo 3												
nodo 4												
nodo 5												
nodo 6												
insieme Q												

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \\ 17\ x_1 + 13\ x_2 \leq 61 \\ 9\ x_1 + 19\ x_2 \leq 65 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		16	59	58
3			98	11
4				10

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{34}, x_{35}.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

Variabili decisionali:
x_{ij} = quantitá (in quintali) di legname da trasferire mensilmente dal deposito D_i alla sede S_j, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$;

Il costo di trasferimento del legname è: $10x_{11} + 8x_{12} + 6x_{21} + 12x_{22} + 14x_{31} + 10x_{32}$.

Il costo di giacenza del legname rimanente nei depositi è:
$3(20 - x_{11} - x_{12}) + 4(25 - x_{21} - x_{22}) + 2(35 - x_{31} - x_{32})$.

Modello:

$$\begin{cases} \min\ (230 + 7x_{11} + 5x_{12} + 2x_{21} + 8x_{22} + 12x_{31} + 8x_{32}) \\ x_{11} + x_{12} \leq 20 \\ x_{21} + x_{22} \leq 25 \\ x_{31} + x_{32} \leq 35 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40 \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,3,\ j = 1,2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

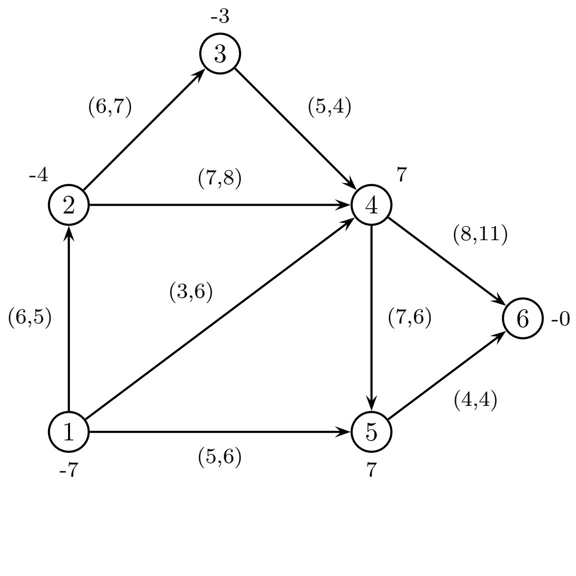
$$\begin{cases} \max\ 2\ x_1 - 3\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (2,\ -8)$	SI	NO
$\{1,\ 3\}$	$y = (-7,\ 0,\ -5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2,\ 4\}$	$(1,\ -6)$	$\left(0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{8}{3},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	4	3, 5, 12	1
2° iterazione	$\{1,\ 2\}$	$(2,\ -8)$	$(8,\ -5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$	2	1, 3	5

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

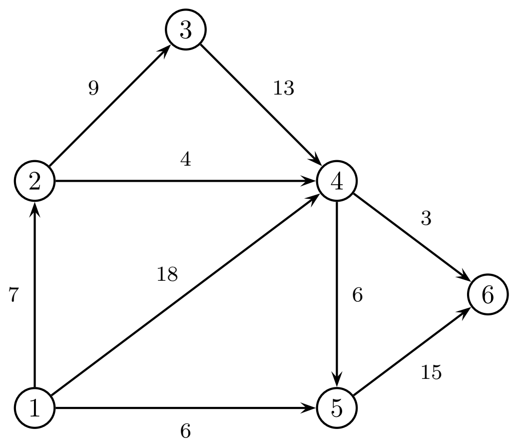


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,5) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6)	(2,3)	$x = (0,\ 0,\ 7,\ 7,\ -3,\ 10,\ 0,\ 0,\ 0)$	NO	SI
(1,5) (2,3) (2,4) (4,5) (5,6)	(3,4)	$\pi = (0,\ -9,\ -3,\ -2,\ 5,\ 9)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

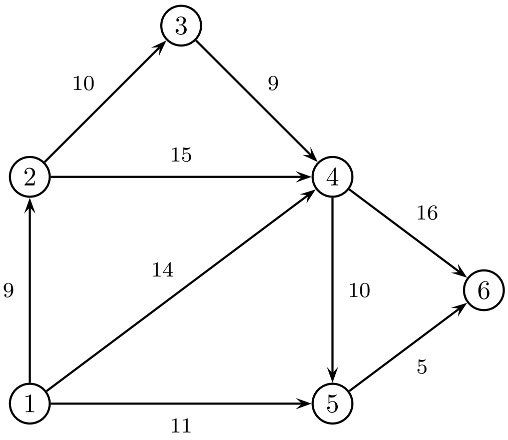
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,5) (3,4) (4,5) (4,6)	(1,2) (2,4) (3,4) (4,5) (4,6)
Archi di U	(2,4)	(1,5)
x	(4, 0, 3, 0, 8, 3, 4, 0, 0)	(1, 0, 6, 0, 5, 3, 1, 0, 0)
π	(0, 6, −7, −2, 5, 6)	(0, 6, 8, 13, 20, 21)
Arco entrante	(2,4)	(1,4)
ϑ^+, ϑ^-	3 , 4	6 , 1
Arco uscente	(1,5)	(1,2)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		5		2		4		6		3	
nodo 2	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
nodo 3	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	16	2	16	2	16	2	16	2
nodo 4	18	1	18	1	11	2	11	2	11	2	11	2
nodo 5	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 6	$+\infty$	-1	21	5	21	5	14	4	14	4	14	4
insieme Q	2, 4, 5		2, 4, 6		3, 4, 6		3, 6		3		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 4 - 6	14	(0, 14, 0, 0, 0, 0, 0, 14, 0)	14
1 - 5 - 6	5	(0, 14, 5, 0, 0, 0, 0, 14, 5)	19
1 - 2 - 4 - 6	2	(2, 14, 5, 0, 2, 0, 0, 16, 5)	21

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad N_t = \{6\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \\ 17\ x_1 + 13\ x_2 \leq 61 \\ 9\ x_1 + 19\ x_2 \leq 65 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{65}{19}\right)$ $\qquad v_S(P) = 47$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 3)$ $\qquad v_I(P) = 42$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad x_2 \leq 3$
$r = 3$ $\qquad x_1 + 3\,x_2 \leq 10$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		16	59	58
3			98	11
4				10

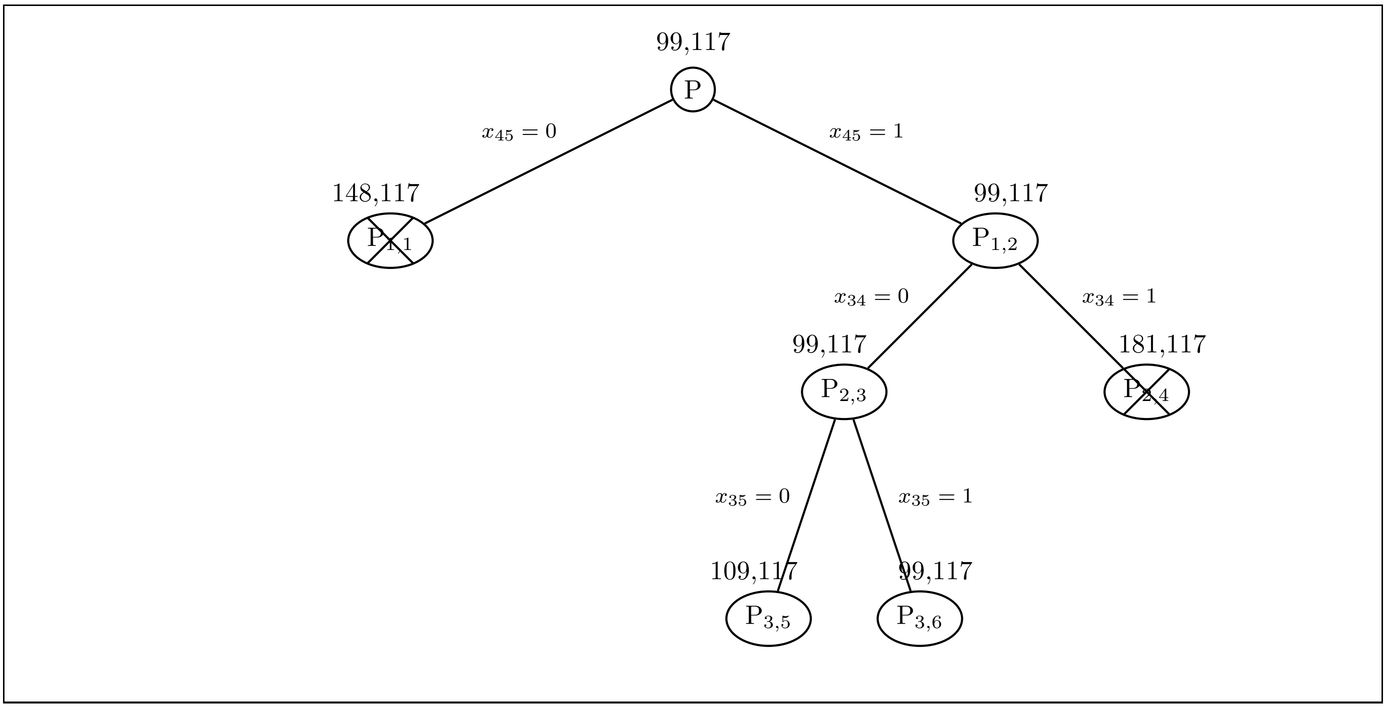
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 2) (1 , 5) (2 , 3) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 99$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: 1 – 2 – 3 – 5 – 4 $\qquad v_S(P) = 117$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{34}, x_{35}.



99,117
P
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
148,117
$P_{1,1}$
99,117
$P_{1,2}$
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
99,117
$P_{2,3}$
181,117
$P_{2,4}$
$x_{35} = 0$
$x_{35} = 1$
109,117
$P_{3,5}$
99,117
$P_{3,6}$