Quarta prova di Ricerca Operativa

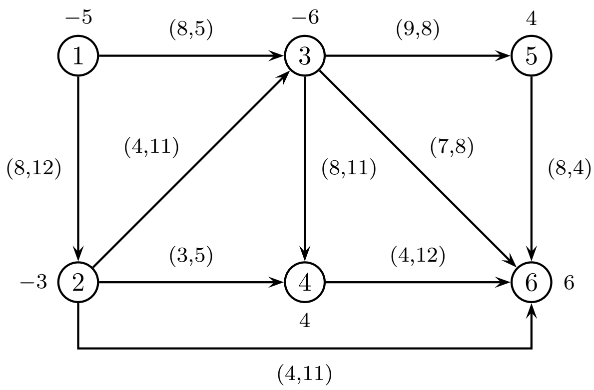
Esercizio 1. Un'azienda produce 4 tipi di TV (32, 40, 50 e 55 pollici) ed é divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 operai in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre i TV e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

TV	32"	40"	50"	55"
Stabilimento A	1.2	1.5	1.7	2
Stabilimento B	1.5	1.6	1.8	2.1
Richiesta	100	700	600	400

I 4 tipi di TV vengono venduti rispettivamente a 400, 600, 1000, e 1500 euro.

Scrivere un modello matematico per determinare quanti TV di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto e scrivere i comandi Matlab. Calcolare una valutazione inferiore. Trovare una soluzione di base del rilassato continuo. La soluzione trovata é un vertice? E' degenere?

Esercizio 2. Su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Scegliendo come albero di copertura $T = \{(1,2)\ (2,3)\ (3,4)\ (3,5)\ (4,6)\}$, l'arco $(1,3)$ come arco di U ed i rimanenti in L, il flusso é ottimo? Se no, trovarne uno migliore eseguendo un passo di un algoritmo risolutivo. Determinare poi il cammino minimo dal nodo 1 al nodo 6 ed il taglio di capacitá minima della rete.

Esercizio 3. Un ospedale deve organizzare i turni giornalieri delle ostetriche. Le esigenze minime del servizio sono quantificate nella seguente tabella.

Turno	1	2	3	4	5	6
Orario	6-10	10-14	14-18	18-22	22-2	2-6
N. minimo	7	8	5	6	4	3

Ogni ostetrica che prende servizio in uno dei primi 5 turni ha il dovere di lavorare 2 turni consecutivi mentre quelle impiegate nell'ultimo turno lavora solo 4 ore.

Scrivere un modello matematico per determinare il minimo numero di infermieri necessari e scrivere i comandi Matlab. Calcolare una valutazione superiore tramite un algoritmo greedy. La soluzione trovata é un vertice del poliedro del rilassato continuo?

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\,x_1^2 - 10\,x_1\,x_2 + 4\ x_1 + 10\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P é dato da:

$$\begin{cases} -x_1 - 2\ x_2 \le -3 \\ -4\ x_1 + 3\ x_2 \le -1 \\ 3\ x_1 - 2\ x_2 \le 9 \\ 2\ x_1 + x_2 \le 13 \end{cases}$$

Partendo dal punto iniziale $(5/3, 2/3)$ fare un passo del metodo del gradiente proiettato ed un passo del metodo di Frank-Wolfe e confrontarli. Il punto $(4, 5)$ é la soluzione ottima?

SOLUZIONI

Esercizio 1.
variabili decisionali: x_{ij} = numero di TV di tipo i prodotti nello stabilimento j, con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = A, B$.

$$\begin{cases} \max\ 400\,(x_{1A} + x_{1B}) + 600\,(x_{2A} + x_{2B}) + 1000\,(x_{3A} + x_{3B}) + 1500\,(x_{4A} + x_{4B}) \\ 1.2\,x_{1A} + 1.5\,x_{2A} + 1.7\,x_{3A} + 2\,x_{4A} \leq 1600 \\ 1.5\,x_{1B} + 1.6\,x_{2B} + 1.8\,x_{3B} + 2.1\,x_{4B} \leq 2000 \\ x_{1A} + x_{1B} \geq 100 \\ x_{2A} + x_{2B} \geq 700 \\ x_{3A} + x_{3B} \geq 600 \\ x_{4A} + x_{4B} \geq 400 \\ x_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Una soluzione di base potrebbe essere: $x = (100, 0, 0, 700, 600, 0, 0, 400)$. E' ammissibile, non degenere e fornisce anche una valutazione inferiore.

Esercizio 2.

	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,3) (3,4) (3,5) (4,6)	(1,2) (2,4) (3,4) (3,5) (4,6)
Archi di U	(1,3)	(1,3)
x	(0, 5, 3, 0, 0, 10, 4, 0, 6, 0)	(0, 5, 0, 3, 0, 7, 4, 0, 6, 0)
π	(0, 8, 12, 20, 21, 24)	(0, 8, 3, 11, 12, 15)
Arco entrante	(2,4)	(1,3)
ϑ^+, ϑ^-	5 , 3	2 , 5
Arco uscente	(2,3)	(2,4)

Esercizio 3.
Introducendo le variabili x_i che rappresentano il numero di ostetriche per ogni turno:

$$\begin{cases} \min\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1 \geq 7 \\ x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_3 + x_4 \geq 6 \\ x_4 + x_5 \geq 4 \\ x_5 + x_6 \geq 3 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, 6 \\ x_i \in N \end{cases}$$

Valutazione superiore 17 data da $x = (7, 1, 4, 2, 2, 1)$ che é anche un vertice del poliedro del rilassato continuo.

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$(-1, -2)$	$\begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{24}{5}, -\frac{12}{5}\right)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{24}$	$\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{6}\right)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$-\frac{28}{3}x_1 - \frac{20}{3}x_2$	(4 ,5)	$\left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$	1	$(4, 5)$

Se si calcolano i moltiplicatori LKKT relativi al punto in questione si trova che sono discordi e quindi il punto é una sella.