Esame di Ricerca Operativa del 7/1/20

Esercizio 1. Una ditta produce produce yogurt di due tipi: cereali e frutta. Nella produzione sono utilizzati yogurt intero, fiocchi di frumento, fiocchi d'avena, lamponi, fragole e zucchero. Settimanalmente la ditta dispone di 40 kg di fiocchi di frumento, 30 kg di fiocchi d'avena, 50 kg di lamponi, 60 kg di fragole e 100 kg di zucchero. I fabbisogni specifici di materia prima (in gr), per 100 gr di prodotto, sono indicati nella seguente tabella:

	Yogurt	
Materia prima	cereali	frutta
fiocchi di frumento	13	0
fiocchi d'avena	8	0.2
lamponi	0	15
fragole	0.5	20
zucchero	9	12

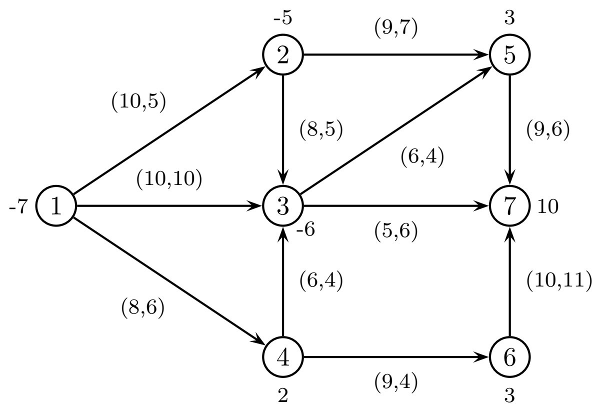
I costi per la produzione di un kg di yogurt ai cereali sono 0.9 Euro mentre per quello alla frutta sono 1.2 Euro. Si vuole determinare quanti Kg di yogurt ai cereali e alla frutta produrre settimanalmente in modo da massimizzare il profitto, tenendo conto che i prezzi di vendita sono di 2.5 Euro e 3.6 Euro al Kg rispettivamente per lo yogurt ai cereali e quello alla frutta.
La soluzione $x = (0, 300)$ é ottima? Se no, effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non chili di yogurt ma scatole di yogurt. Calcolare poi un taglio di Gomory.

Esercizio 2. Si consideri il problema di caricare (in modo binario) un camion di portata massima pari a 250 quintali, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti.

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	9	11	23	12	5	10	21
Volumi	119	129	55	230	43	73	3

Calcolare una valutazione superiore considerando il rilassamento $x \geq 0$. La soluzione ottima di tale rilassamento continuo é un vertice? Se sí quale é la base? Scrivere l'equazione di un piano di taglio di Gomory. Calcolare poi una valutazione superiore ed una inferiore considerando il rilassamento $0 \leq x \leq 1$. Eseguire l'algoritmo del Branch and Bound istanziando almeno 2 variabili.

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (1,4), (2,5), (3,5), (3,7) e (4,6), l'arco (5,7) come arco saturo e gli archi rimanenti in L, il flusso ottenuto é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi l'albero dei cammini minimi di radice 1 e scrivere il flusso ad esso associato e dire se é di base e se sí quale é la base. Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima ed il flusso massimo.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \ -6\, x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 - 4\, x_2^2 + 9\, x_1 - 9\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P é il poliedro di vertici $(3, -4)$, $(2, -5)$, $(0, 4)$ e $(-3, 2)$.
E' un problema di ottimizzazione convesso? Eseguire un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe ed un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $x^k = \left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right)$. Trovare il massimo globale, se esiste.

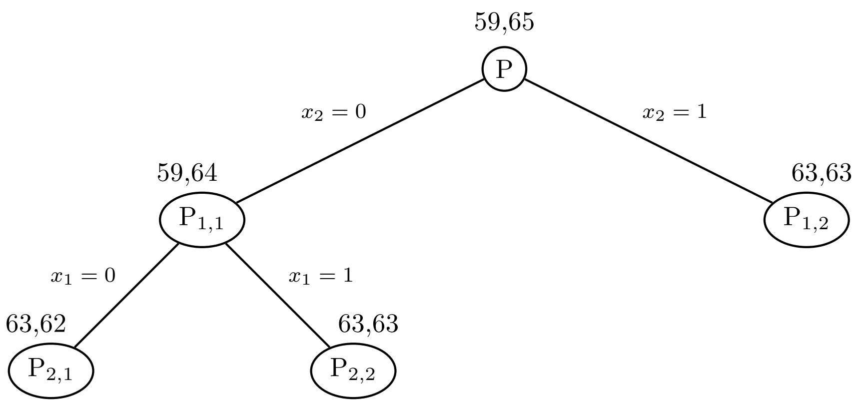
SOLUZIONI

Esercizio 1.

variabili decisionali	modello
$x_1 =$ Kg yogurt ai cereali $x_2 =$ Kg yogurt alla frutta	$\begin{cases} \max\ 2.5\ x_1 + 3.6\ x_2 - 0.9\ x_1 - 1.2\ x_2 \\ 130\ x_1 \leq 40000 \\ 80\ x_1 + 2\ x_2 \leq 30000 \\ 150\ x_2 \leq 50000 \\ 5\ x_1 + 200\ x_2 \leq 60000 \\ 90\ x_1 + 120\ x_2 \leq 100000 \\ x_i \geq 0,\ \ i = 1,2 \end{cases}$

La base iniziale é $(4,6)$ e la relativa soluzione duale é: $y = (0,0,0,3/25,0,-77/50,0)$. L'indice uscente é 6 mentre quello entrante é 1. La nuova base dá la soluzione ottima $(307.7, 292.3)$. In caso di scatole va aggiunto il vincolo di interezza e quindi la soluzione trovata é una valutazione superiore di valore 11939 mentre $(307, 292)$ é la valutazione inferiore di valore 11920. Il taglio di Gomory é dato da $x_1 \leq 307$

Esercizio 2. Nel caos intero la soluzione del rilassato é $x = (0,0,0,0,0,0,250/3)$ di valore 1750. Una valutazione inferiore del valore ottimo tramite algoritmo dei rendimenti é data da $x = (0,0,1,0,1,1,1)$ con $v_I(P) = 59$. Una valutazione superiore data dal rilassamento continuo. $x = (0, \frac{76}{129}, 1, 0, 1, 1, 1)$ con $v_S(P) = 65$



La soluzione ottima é $x = (1,0,1,0,0,1,1)$ di valore ottimo $= 63$

Esercizio 3.

	iterazione 1	
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(5,7)	(5,7)
x	(2, 0, 5, 0, 7, 2, 4, 0, 3, 6, 0)	(0, 2, 5, 0, 5, 4, 4, 0, 3, 6, 0)
π	(0, 10, 13, 8, 19, 17, 18)	
Arco entrante	(1,3)	
ϑ^+, ϑ^-	2 , 2	
Arco uscente	(1,2)	

L'albero die cammini minimi é (1,2), (1,3), (1,4), (3,5), (3,7) e (4,6). Il flusso ottimo é $x = (1,3,2,0,0,1,1,0,1,0,0)$. Il flusso massimo é di valore 4 con $N_t = 6$

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right)$	$(1, -1)$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$(7, 7)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{12}$	$\left(\frac{35}{12}, -\frac{49}{12}\right)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right)$	$-29/3x_1 + 71/3x_2$	(0,4)	(-7/3, 26/3)	683/1756	(7511/5268,-3413/2634)

Il massimo assoluto é il vertice della parabola $x = (45/46, -63/46)$.