Fac-simile compito di Ricerca Operativa applicata alla logistica 5-12-2019

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Nelle due tabelle che seguono sono riportate le distanze reciproche (in km) tra 8 cittá della regione Toscana ed il costo (in milioni di euro) per costruire una stazione dei vigili del fuoco in ognuna delle 8 cittá:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	26	31	35	19	17	13	23
2	26	0	25	18	17	23	14	34
3	31	25	0	19	11	17	33	19
4	35	18	19	0	25	22	16	17
5	19	17	11	25	0	28	34	10
6	17	23	17	22	28	0	15	28
7	13	14	33	16	34	15	0	23
8	23	34	19	17	10	28	23	0

Cittá	Costo di costruzione
1	3
2	2
3	4
4	5
5	4
6	7
7	3
8	5

In ogni cittá dobbiamo decidere se costruire o no una stazione dei vigili del fuoco, in modo che per ogni cittá esista almeno una stazione distante al piú 20 km.

a) Scrivere un modello matematico per minimizzare il costo totale di costruzione.
b) Applicare l'algoritmo di riduzione.
c) Determinare una valutazione superiore ed una inferiore.
d) Scrivere i comandi Matlab e trovare la soluzione ottima.

Esercizio 2. Si consideri una rete di cittá le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	23	18	17	21
2		22	16	16
3			20	19
4				14

a) Scrivere un modello matematico per trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla rete di cittá.
b)Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 1. Applicare poi un passo dell'algoritmo di ricerca locale.
c) Scrivere i comandi Matlab e trovare la soluzione ottima.

Esercizio 3. Una ditta tessile produce due tipi di filati X e Y usando due macchine A e B. Ogni metro di X prodotto richiede di essere lavorato 50 minuti sulla macchina A e 30 minuti su B. Ogni metro di Y prodotto richiede 20 minuti su A e 30 su B. All'inizio della settimana corrente, in magazzino ci sono 30 metri di X e 80 di Y. Durante questa settimana la macchina A puó lavorare al massimo 40 ore e la macchina B al massimo 30 ore. Per la fine della settimana, la ditta deve consegnare 70 metri di filato X e 90 metri di filato Y.

a) Scrivere un modello matematico che determini il piano di produzione che massimizza le scorte dopo le consegne.
b) Scrivere i comandi Matlab e trovare la soluzione ottima.
c) Per aumentare la produttivitá sarebbe meglio avere piú ore disponibili della macchina A o della macchina B? Perché?

SOLUZIONI

Esercizio 1. La formulazione del problema é la seguente:

$$\begin{cases} \min 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 7x_6 + 3x_7 + 5x_8 \\ x_1 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + x_8 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_8 \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_8 \geq 1 \\ x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \ldots, 8 \end{cases}$$

Il problema puó essere anche scritto nella forma classica di copertura dove il vettore c e la matrice A sono indicati nella tabella che segue:

c_j	3	2	4	5	4	7	3	5
$_i\backslash^j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	1	1	0	1	0
3	0	0	1	1	1	1	0	1
4	0	1	1	1	0	0	1	1
5	1	1	1	0	1	0	0	1
6	1	0	1	0	0	1	1	0
7	1	1	0	1	0	1	1	0
8	0	0	1	1	1	0	0	1

Osserviamo che é possibile effettuare una riduzione del problema: si ha che $A^6 \leq A^1 + A^3$ e che $c_6 = c_1 + c_3$, pertanto possiamo fissare la variabile $x_6 = 0$ ed eliminare la colonna 6. Inoltre $A^8 \leq A^3$ e $c_8 > c_3$, quindi fissiamo anche la variabile $x_8 = 0$ ed eliminiamo la colonna 8; infine le righe 3 e 8 sono uguali, pertanto si puó eliminare la riga 8. Il problema cosí ridotto diventa:

c_j	3	2	4	5	4	3
$_i\backslash^j$	1	2	3	4	5	7
1	1	0	0	0	1	1
2	0	1	0	1	1	1
3	0	0	1	1	1	0
4	0	1	1	1	0	1
5	1	1	1	0	1	0
6	1	0	1	0	0	1
7	1	1	0	1	0	1

Quindi le soluzioni ottime del problema (PC) iniziale sono $x^1 = (0,0,0,0,1,0,1,0)$ e $x^2 = (0,0,1,0,0,0,1,0)$ di costo 7.

Esercizio 2.

2–albero: (1,3) (1,4) (2,4) (2,5) (4,5)	$v_I(P) = 81$
ciclo: 1–4–5–2–3–1	$v_S(P) = 87$
ciclo: 1–3–5–2–4–1	$v_S(P) = 86$

Esercizio 3.

$x =$ metri di filato X prodotto durante la settimana, $y =$ metri di filato Y prodotto durante la settimana

modello:
$$\begin{cases} \max\ (x + 30 - 70) + (y + 80 - 90) \\ 50\,x + 20\,y \leq 40 * 60 \\ 30\,x + 30\,y \leq 30 * 60 \\ x + 30 \geq 70 \\ y + 80 \geq 90 \end{cases}$$

```
c=[ -1 -1 ]

A=[ 50 20 ; 30 30 ]            b=[ 2400 ; 1800 ]

Aeq=[]                         beq=[]

lb=[40 ; 10 ]                  ub=[]
```

soluzione ottima: (40,20)	$v(P) = 60$