

## Ricerca Operativa.

### 1. Formulazione.

Un'azienda produce una bibita all'arancia combinando seltz d'arancia e succo d'arancia. 100 gr. di seltz d'arancia contengono 50 gr. di zucchero e 3 mg. di vitamina C mentre 100 gr. di succo contengono 25 gr. di zucchero e 9 mg. di vitamina C. All'azienda produrre seltz d'arancia costa 5 centesimi di euro ogni 100 gr., mentre il succo costa 8 centesimi di euro ogni 100 gr. Il dipartimento interno di marketing ha deciso che ogni bottiglia da un litro deve contenere almeno 60 mg. di vitamina C e al più 400 gr. di zucchero. Determinare il piano di produzione ottimale.

### 2. Risoluzione geometrica.

Risolvere per via geometrica il problema di programmazione lineare

$$\max cx, \quad Ax \leq b,$$

quando  $c = (61, 58)$ ,  $b = (7, 3, 1, 7, 9, 0)^t$  e  $A$  è la matrice formata dalle sei righe  $A_1 = (7, 6)$ ,  $A_2 = (7, 8)$ ,  $A_3 = (5, 6)$ ,  $A_4 = (1, 0)$ ,  $A_5 = (0, 1)$ ,  $A_6 = (0, 1)$ . Per quali vettori  $c$  la soluzione resta quella precedentemente trovata?

### 3. Poliedri.

Dei seguenti poliedri determinare la rappresentazione di Weyl e determinare, poi, la matrice  $A$  e il vettore  $b$  per scrivere il poliedro nella forma  $\{x : Ax \leq b\}$  :

- la regione di piano delimitata dal poligono di vertici  $(5, 0)$ ,  $(1, 7)$ ,  $(0, 6)$ ;
- l'insieme  $\{x \in R^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}$ ;
- l'insieme  $\{x \in R^2 : -1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1\}$ .

### 4. Identificazione dei dati e formati standard.

Si considerano i problemi seguenti.

Problema 1.

$$\begin{array}{rcccccc} \min & 7y_1 & +3y_2 & +y_3 & +7y_4 & +9y_5 & \\ & 7y_1 & +7y_2 & +5y_3 & +y_4 & & = 61 \\ & 6y_1 & +8y_2 & +6y_3 & & +y_5 & \leq 58. \end{array}$$

Problema 2.

$$\begin{array}{rcccccc} \max & 7y_1 & +3y_2 & +y_3 & & +9y_5 & \\ & 7y_1 & +7y_2 & +5y_3 & +y_4 & & = 61 \\ & 6y_1 & +8y_2 & +6y_3 & & +y_5 & \leq 58. \end{array}$$

Problema 3.

$$\begin{array}{rcccccc} \min & 7y_1 & +3y_2 & +y_3 & +7y_4 & +9y_5 & \\ & 7y_1 & +7y_2 & +5y_3 & +y_4 & & \geq 61 \\ & 6y_1 & +8y_2 & +6y_3 & & +y_5 & \leq 58 \\ & & & & & & y_i \geq 0. \end{array}$$

Problema 4.

$$\begin{array}{rcccccc} \max & 7y_1 & +3y_2 & +y_3 & +7y_4 & +9y_5 & \\ & 7y_1 & +7y_2 & +5y_3 & +y_4 & & = 61 \\ & 6y_1 & +8y_2 & +6y_3 & & +y_5 & \leq 58 \\ & & & & & & y_i \geq 0. \end{array}$$

Scrivere ciascuno dei problemi in una equivalente forma primale standard ed in una equivalente forma duale standard..

**Soluzione.**

Se si indicano con  $x_1$  e  $x_2$  le quantità (in grammi) di seltz e succo rispettivamente, presenti in un litro di bibita all'arancia, deve essere  $x_1 + x_2 = 1000$ . Allora in  $x_1$  grammi di seltz ci sono  $x_1/2$  grammi di zucchero e  $3 \cdot 10^{-5}$  grammi di vitamina. Analogamente, in  $x_2$  grammi di succo sono presenti  $x_2/4$  grammi di zucchero e  $9 \cdot 10^{-5}$  grammi di vitamina. Per soddisfare la richiesta sullo zucchero, si chiede allora che sia

$$x_1/2 + x_2/4 \leq 400$$

e per soddisfare la richiesta di vitamina si chiede che sia

$$3 \cdot 10^{-3}x_1 + 9 \cdot 10^{-3}x_2 \geq 6.$$

Il costo (in centesimi di euro per litro) risulta invece dato da

$$(5/100)x_1 + (8/100)x_2.$$

Il piano di produzione ottimale si ottiene risolvendo il problema

$$\begin{array}{rllll} \min & (5/100)x_1 & +(8/100)x_2 & & \\ & (1/2)x_1 & +(1/4)x_2 & \leq & 400 \\ & 3 \cdot 10^{-3}x_1 & +9 \cdot 10^{-3}x_2 & \geq & 6 \\ & x_1 & +x_2 & = & 1000 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$