Esame di Ricerca Operativa del 3/6/19

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Un'azienda produce 2 tipi di laminati (X e Y) che devono essere lavorati in 4 reparti: Assemblaggio (A), Taglio (T), Rifinitura X (RX), Rifinitura Y (RY). Le ore necessarie in ogni reparto per produrre un quintale di laminato e le disponibilitá in ore di ogni reparto sono indicate nella seguente tabella:

	A	T	RX	RY
Laminato X	30	10	20	0
Laminato Y	20	20	0	30
Disponibilitá	120	85	62	105

I 2 tipi di laminati vengono venduti rispettivamente a 8, 11 migliaia di euro al quintale.

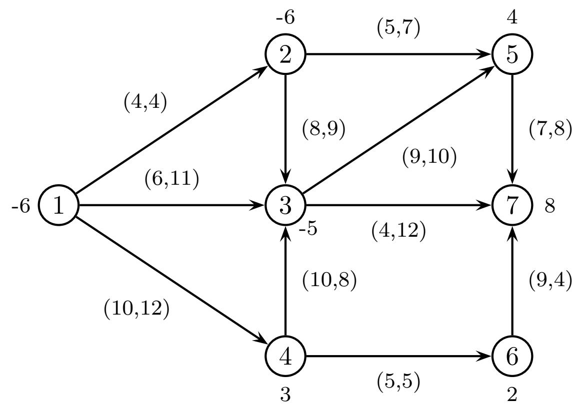
Scrivere un modello matematico per determinare quanti quintali di laminato di ogni tipo produrre in modo da massimizzare il profitto e scrivere i comandi di Matlab. $(3.1, 1.35)$ é la soluzione ottima? Se no, utilizzarla per trovarne una migliore (non graficamente) e dire se é la soluzione ottima.
Supponiamo che la produzione dell'azienda siano fogli di laminato e che il guadagno sia ora inteso a foglio. Trovare una valutazione superiore ed una inferiore. Costruire un piano di taglio di Gomory.

Esercizio 2. Un istituto bancario ha la possibilitá di aprire fino ad un massimo di nove nuove filiali nelle province toscane. Nella tabella sono riportati il costo di apertura in migliaia di euro e il numero di potenziali nuovi clienti che si possono acquisire.

Provincia	FI	LI	LU	GR	FI	SI	AR	SI	PI
Costo	50	40	30	25	40	50	60	40	30
Potenziali clienti	300	100	250	200	400	120	100	100	400

Avendo a disposizione un budget di 200.000 euro scrivere e risolvere il problema di stabilire dove aprire le nuove filiali per massimizzare il numero di potenziali nuovi clienti da acquisire.
Se l'istituto sa che non puó aprire piú di una filiale nella provincia di Firenze cosa si puó dire con la soluzione ottima appena trovata? In generale la soluzione ottima potrebbe rimanere inalterata? Se sí, fornire un esempio.

Esercizio 3. Su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Scegliendo come albero di copertura $T = \{(1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (3,5)\ (4,6)\ (5,7)\}$, l'arco $(2,5)$ come arco di U ed i rimanenti in L, il flusso é ottimo? Se no, trovarne uno migliore. Determinare poi il cammino minimo dal nodo 1 al nodo 6 ed il taglio da 1 a 7 di capacitá minima della rete.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\,x_1\,x_2 + x_1 + 4\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P é il poliedro di vertici $(0,1)$, $(-1,-5)$, $(-3,-5)$ e $(-3,-1)$. Partendo dal punto iniziale $(-3,-11/3)$ fare un passo del metodo del gradiente proiettato ed uno del metodo di Frank-Wolfe e confrontarli. Il punto (-3,-1) é la soluzione ottima del problema?

SOLUZIONI

Esercizio 1. x_1 = quintali di laminato X; x_2 = quintali di laminato Y

$$\begin{cases} \max 8\,x_1 + 11\,x_2 \\ 30\,x_1 + 20\,x_2 \leq 120 \\ 10\,x_1 + 20\,x_2 \leq 85 \\ 20\,x_1 \leq 62 \\ 304\,x_2 \leq 105 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

La soluzione $x = (3.1, 1.35)$ é data dalla base $1,3$ e la soluzione duale associata é $y = (11/20, 0, -17/40, 0, 0, 0)$. Indice uscente $h = 3$. La matrice W é: $\begin{pmatrix} 0 & -1/20 \\ -1/20 & 3/40 \end{pmatrix}$ ed i rapporti sono $r_2 = 27$ e $r_4 = 86/3$, indice entrante $k = 2$.

La nuova soluzione di base é: $x = (7/4, 27/8) = (1.75, 3.375)$ che é quella ottima.
Nel caso dei fogli al modello va aggiunto il vincolo di interezza é la soluzione ottima trovata ci dá la valutazione superiore 51. Se arrotondiamo $x = (1, 3)$ otteniamo la valutazione inferiore 41. La matrice $\tilde{A}$ é: $\begin{pmatrix} 1/20 & -1/20 \\ -1/40 & 3/40 \end{pmatrix}$ ed il piano di taglio $r = 1$ é: $11\,x_1 + 20\,x_2 \leq 86$

Esercizio 2.
Il modello é quello dello zaino binario. L'algoritmo dei rendimenti $(9, 5, 3, 4, 1, 2, 8, 6, 7)$ fornisce una $v_I = 1550$ data da $x = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$ ed una $v_S = 1612$ data da $x = (1, 5/8, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$. Poi si effettua il Branch and Bound. Se non si puó aprire piú di una filiale a Firenze bisognerebbe aggiungere il vincolo $x_1 + x_5 \leq 1$.

Esercizio 3.

	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (3,7) (4,6) (5,7)
Archi di U	(2,5)	(2,5)
x	(1, 0, 5, 0, 7, 5, 0, 0, 2, 8, 0)	(1, 0, 5, 0, 7, 0, 5, 0, 2, 3, 0)
π	(0, 4, 6, 10, 15, 15, 22)	(0, 4, 6, 10, 3, 15, 10)
Arco entrante	(3,7)	(2,5)
ϑ^+, ϑ^-	12 , 5	7 , 1
Arco uscente	(3,5)	(1,2)

La sequenza dei cammini aumentanti é $1-3-7, 1-2-3-7, 1-2-5-7, 1-4-6-7, 1-4-3-5-7$ con flusso massimo 24. Il taglio é $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-3, -\frac{11}{3}\right)$	$(-1, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(0, 2)$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$(-3, -1)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-3, -\frac{11}{3}\right)$	$-\frac{19}{3}x_1 - 2x_2$	(0 ,1)	$\left(3, \frac{14}{3}\right)$	$\frac{85}{168}$	$\left(-\frac{83}{56}, -\frac{47}{36}\right)$

I moltiplicatori sono discordi $\left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$ quindi non é soluzione ottima