Esame di Ricerca Operativa del 29/6/19

Esercizio 1. Un'azienda produce due tipi di carburanti (A e B) che sono lavorati in 3 diverse fasi. I tempi in ore per produrre una tonnellata di carburante sono dati in tabella insieme alla capacitá produttiva giornaliera dei tre reparti. Ogni tonnellata di carburante A viene venduta a 540 euro mentre quella del carburante B a 590 euro.

	A	B	Capacitá
R1	0.7	0.8	18
R2	1.7	1.4	16
R3	1.9	2.1	16

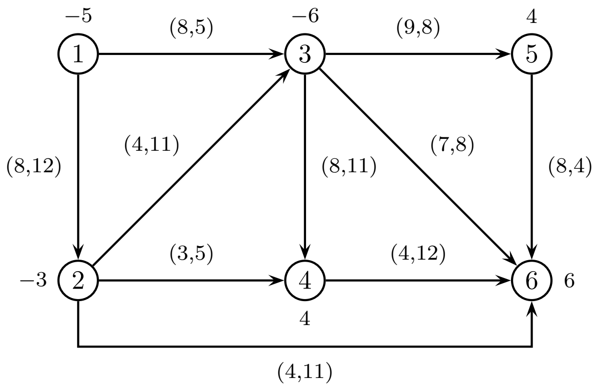
Partendo dalla soluzione $x = (0, 0)$ effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non carburante ma sylos. Calcolare poi un taglio di Gomory.

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	24	4	39	43
2		22	5	17
3			34	10
4				38

Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando l'1–albero di costo minimo. Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 1. Il ciclo cosí trovato é l'assegnamento di costo minimo? Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando l'1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{13}, x_{23}, x_{35}. Siamo arrivati all'ottimo?

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (2,3), (3,4), (3,5) e (4,6), l'arco (1,3) come arco saturo ed gli archi rimanenti in L, il flusso ottenuto é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi il cammino minimo dal nodo 1 al nodo 6. Quanto costa? Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima ed il flusso massimo. Dire se il flusso massimo trovato é di base e se sí quale é la base.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -x_1^2 - 2\,x_2^2 \\ -x_1 + 1 \leq 0 \\ -x_2 + 1 \leq 0 \\ x_1 + x_2 - 6 \leq 0 \end{cases}$$

E' un problema di ottimizzazione convesso? Il minimo globale esiste? I vincoli sono regolari? Eseguire un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe ed un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $x_k = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$. Trovare i minimi globali e locali.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max 540\,x_1 + 590\,x_2 \\ 0.7\,x_1 + 0.8\,x_2 \le 18 \\ 1.7\,x_1 + 1.4\,x_2 \le 16 \\ 1.9\,x_1 + 2.1\,x_2 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

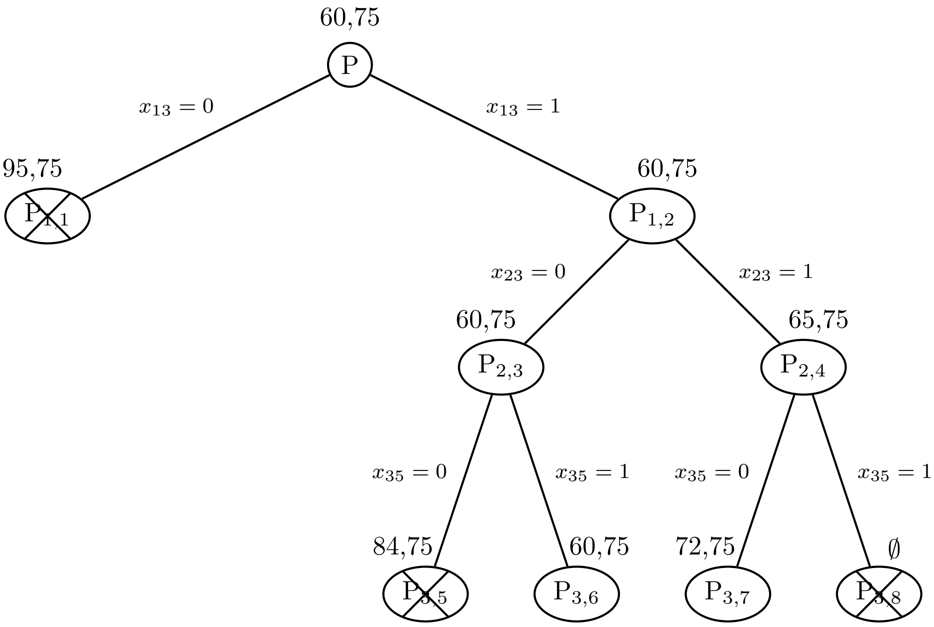
La base iniziale é $(4, 5)$. L'indice uscente é il 4 mentre l'indice entrante é il 3. Il nuovo vertice é $(160/19, 0)$ che é anche la soluzione ottima. In caso di sylos va aggiunto il vincolo di interezza e quindi la soluzione ottima appena trovata é una valutazione superiore di valore 4547 mentre $(8, 0)$ é la valutazione inferiore di valore 4320. Il taglio di Gomory é dato da $x_1 + x_2 \le 8$

Esercizio 2.

a) 1–albero: (1 , 2) (1 , 3) (2 , 4) (2 , 5) (3 , 5), $\quad v_I(P) = 60$

b) ciclo: 1 – 3 – 5 – 2 – 4, $\quad v_S(P) = 75$

c)



Esercizio 3.

	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,3) (3,4) (3,5) (4,6)	(1,2) (2,4) (3,4) (3,5) (4,6)
Archi di U	(1,3)	(1,3)
x	(0, 5, 3, 0, 0, 10, 4, 0, 6, 0)	(0, 5, 0, 3, 0, 7, 4, 0, 6, 0)
π	(0, 8, 12, 20, 21, 24)	
Arco entrante	(2,4)	
ϑ^+, ϑ^-	5 , 3	
Arco uscente	(2,3)	

La sequenza dei cammini aumentanti é $1-2-6, 1-3-6, 1-2-3-6$ con i δ pari a 11, 5 e 1 rispettivamente, con flusso massimo $x = (12, 5, 1, 0, 11, 0, 0, 6, 0, 0)$ di valore 17. Il taglio é $N_s = \{1\}$. Il cammino minimo é 1-2-6 di costo 12.

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{3}{2}, 1\right)$	$(0, -1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(3, 0)$	$\dfrac{7}{6}$	$\dfrac{7}{6}$	$(5, 1)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{3}{2}, 1\right)$	$-3x_1 - 4x_2$	(1 ,5)	$\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$	1	$(1, 5)$

Il minimo assoluto é $x = (1, 5)$, mentre $x = (5, 1)$ é minimo locale.