Esame di Ricerca Operativa

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 6\ x_2 \\ -3\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ -x_1 \leq 1 \end{cases}$$

	Base	x	Degenere?	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° passo	{2,6}						
2° passo							

Esercizio 2. Un'industria di lavorazione del marmo ha due stabilimenti dove produce lastre di marmo di tre diverse qualità: bassa, media e alta. Per contratto, l'industria deve fornire a una ditta esterna almeno 40, 30 e 50 tonnellate di marmo di bassa, media e alta qualità, rispettivamente. La seguente tabella riporta le caratteristiche di produzione nei due diversi stabilimenti:

Stabilimento	costo giornaliero (euro)	produzione (tonnellate/giorno)		
		bassa	media	alta
1	300	5	3	2
2	400	1	2	4

Scrivere un modello di PL/PLI che determina quanti giorni di lavoro sono necessari nei due stabilimenti per minimizzare i costi.

variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

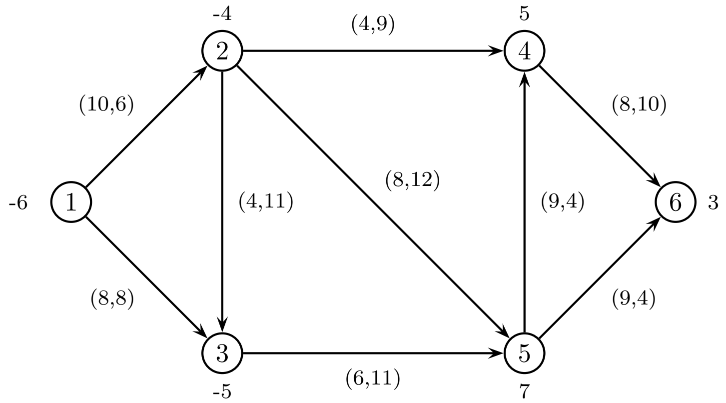
```
c=                                   intcon=

A=                                   b=

Aeq=                                 beq=

lb=                                  ub=
```

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,4) (2,5) (3,5) (5,6)	
Archi di U	(5,4)	
x		
degenere?		
π		
degenere?		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 6\ x_2 \\ 13\ x_1 + 11\ x_2 \geq 66 \\ 18\ x_1 + 6\ x_2 \geq 43 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

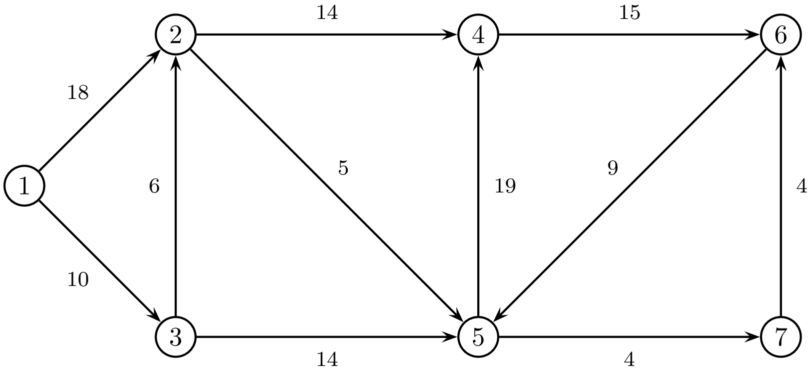
b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

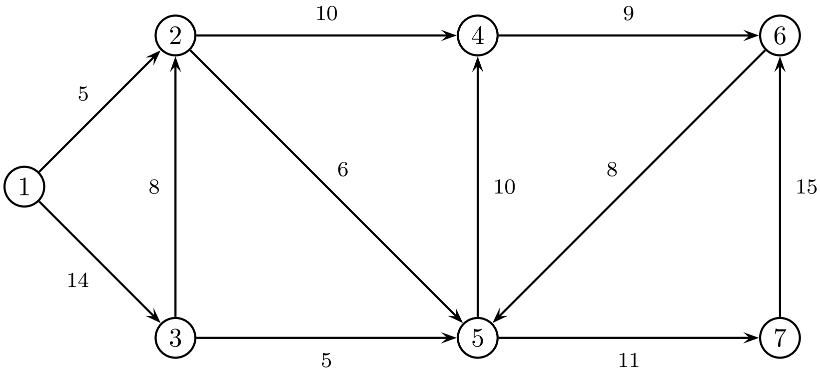
$r =$	taglio:

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 6. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	24	8	27	14
2		19	32	38
3			24	26
4				25

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando l'1–albero di costo minimo.

1–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando l'1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{25}, x_{24}, x_{13} e dire alla fine se è stata trovata la soluzione ottima.

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4\,(x_2 - 2)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 - x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
	0						
	-1						
	-1						
	-16						

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \; -4\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 8\,x_1 - 3\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P ha vertici $(4, -4)$, $(-5, 5)$, $(-2, 5)$ e $(-1, -4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{2}{3}, -4\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 6\ x_2 \\ -3\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ -x_1 \leq 1 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2, 6\}$	$(-1,\ 0)$	$(0,\ -6,\ 0,\ 0,\ 0,\ -5)$	2	$0,\ \frac{5}{2},\ 7$	1
2° iterazione	$\{1, 6\}$	$(-1,\ 0)$	$(6,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -23)$	6	$1,\ \frac{7}{4},\ 5$	3

Esercizio 2.

variabili decisionali:
x_1 = giorni di lavoro nello stabilimento 1
x_2 = giorni di lavoro nello stabilimento 2

modello: $\begin{cases} \min 300\, x_1 + 400\, x_2 \\ 5\, x_1 + x_2 \geq 40 \\ 3\, x_1 + 2\, x_2 \geq 30 \\ 2\, x_1 + 4\, x_2 \geq 50 \\ x_1, x_2 \geq 0, \\ x \textit{ intero.} \end{cases}$

COMANDI DI MATLAB

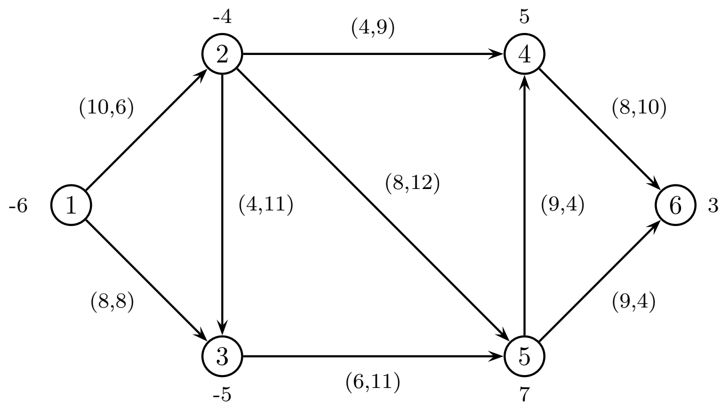
```
c=[ 300 ; 400]                      intcon=[1 2]

A=[ -5 -1 ; -3 -2 ; -2 -4 ]         b=[ -40 ; -30 ; -50 ]

Aeq=[]                              beq=[]

lb=[0; 0]                           ub=[]
```

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,4) (2,5) (3,5) (5,6)	(1,3) (2,4) (2,5) (3,5) (5,6)
Archi di U	(5,4)	(5,4)
x	(6, 0, 0, 1, 9, 5, 0, 4, 3)	(0, 6, 0, 1, 3, 11, 0, 4, 3)
degenere?	SI	SI
π	(0, 10, 12, 14, 18, 27)	(0, 6, 8, 10, 14, 23)
degenere?	NO	NO
Arco entrante	(1,3)	(4,6)
ϑ^+, ϑ^-	6 , 6	8 , 3
Arco uscente	(1,2)	(2,5)

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 6\ x_2 \\ 13\ x_1 + 11\ x_2 \geq 66 \\ 18\ x_1 + 6\ x_2 \geq 43 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{66}{13}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 31$

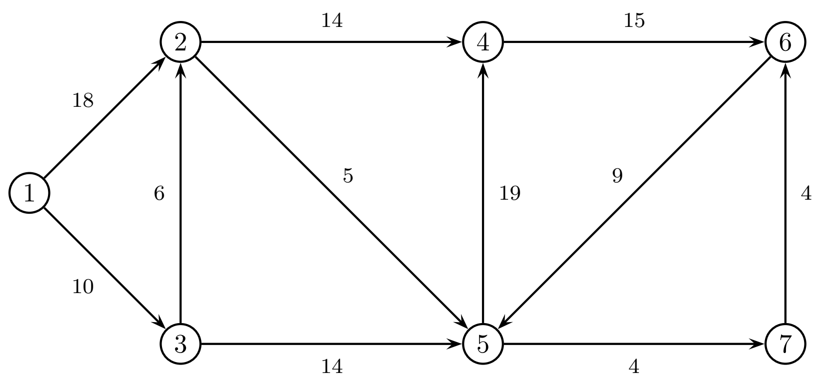
b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(6, 0)$ $\qquad v_S(P) = 36$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

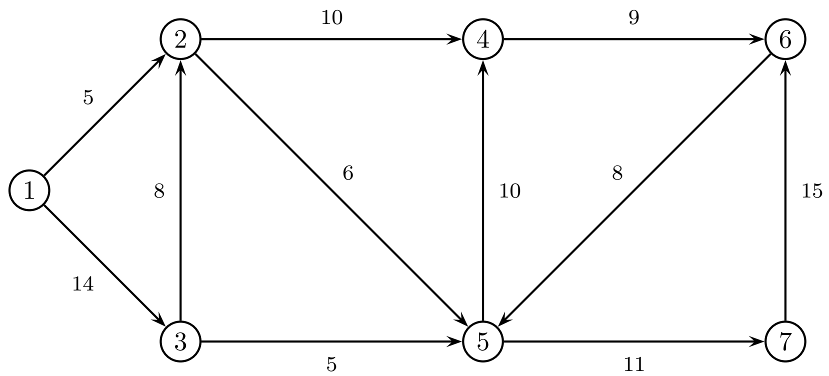
$r = 1$ $\qquad 12\,x_1 + 11\,x_2 \geq 61$
$r = 4$ $\qquad 8\,x_1 + 7\,x_2 \geq 41$

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		7		6		4	
nodo 2	18	1	16	3	16	3	16	3	16	3	16	3	16	3
nodo 3	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	30	2	30	2	30	2	30	2	30	2
nodo 5	$+\infty$	-1	24	3	21	2	21	2	21	2	21	2	21	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	29	7	29	7	29	7
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	25	5	25	5	25	5	25	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		4, 6		4		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	5	(5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0)	5
1 - 3 - 5 - 7	5	(5, 5, 0, 5, 0, 5, 0, 0, 10, 0, 0)	10
1 - 3 - 2 - 5 - 7	1	(5, 6, 0, 6, 1, 5, 0, 0, 11, 0, 0)	11

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

Esercizio 6. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	24	8	27	14
2		19	32	38
3			24	26
4				25

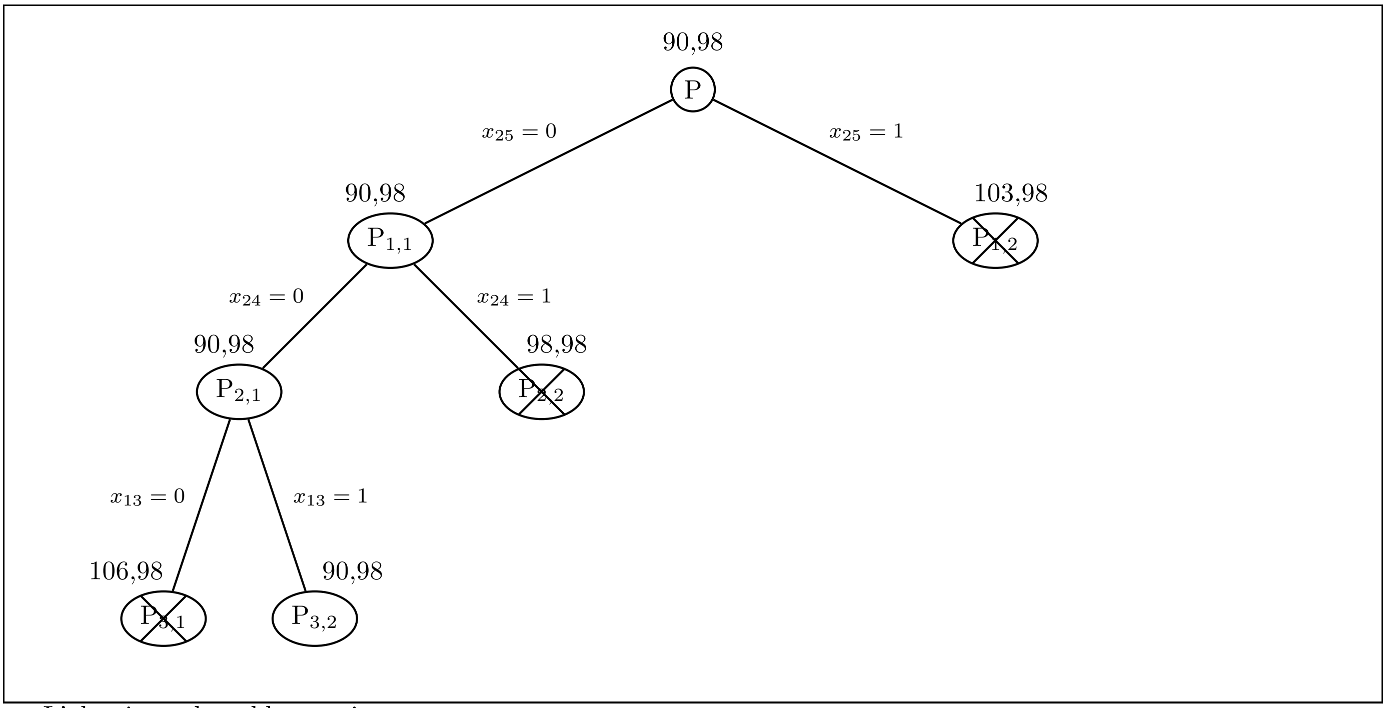
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando l'1–albero di costo minimo.

1–albero: (1 , 3) (1 , 5) (2 , 3) (3 , 4) (4 , 5) $\quad v_I(P) = 90$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: 3 – 1 – 5 – 4 – 2 $\quad v_S(P) = 98$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando l'1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{25}, x_{24}, x_{13}.



L'algoritmo dovrebbe continuare.

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4\,(x_2 - 2)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 - x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0, \; 2)$	0		NO	NO	SI	SI	NO
$\left(-\sqrt{\frac{15}{8}}, \; \frac{15}{8}\right)$	-1		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(\sqrt{\frac{15}{8}}, \; \frac{15}{8}\right)$	-1		NO	NO	NO	NO	SI
$(0, \; 0)$	-16		NO	SI	NO	NO	NO

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \; -4\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 8\,x_1 - 3\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P ha vertici $(4, -4)$, $(-5, 5)$, $(-2, 5)$ e $(-1, -4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{2}{3}, -4\right)$	$(0, -1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{32}{3}, 0\right)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$(2, -4)$