Esame di Ricerca Operativa

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 11\ y_1 + 3\ y_2 + 5\ y_3 + 7\ y_4 + y_5 + 4\ y_6 \\ 3\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - 3\ y_5 = 1 \\ -y_1 - 3\ y_2 + y_3 + 3\ y_4 - y_5 - y_6 = -9 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{1, 3}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{3,6}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una macelleria produce tre tipi diversi di hamburger lavorando due tipi di carne (A e B). La quantitá necessaria per produrre un quintale dei rispettivi hamburger e la disponibilitá di carne sono date in kg nella seguente tabella.

	classico	messicano	tirolese	disponibilitá
A	40	44	48	800
B	40	36	42	950
Richiesta Minima	90	80	50	

Sapendo che i prezzi di vendita (Euro/chilo) siano 5, 5.6 e 6.4 stabilire la produzione che massimizzi il profitto.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

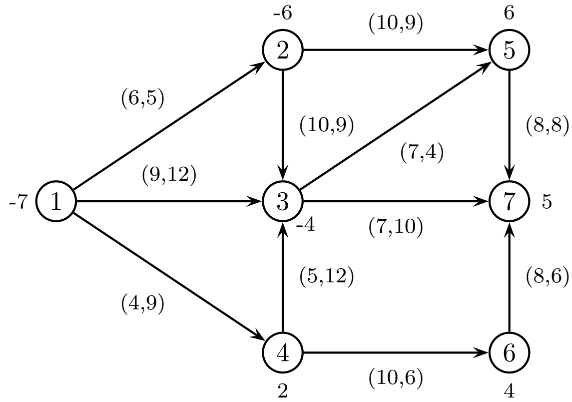
```
c=                    intlinprog=

A=                    b=

Aeq=                  beq=

lb=                   ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

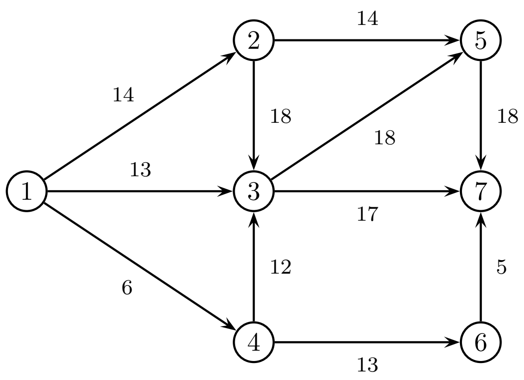


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,5) (3,5) (4,3) (5,7) (6,7)	(4,6)	$x =$		
(1,4) (2,3) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,3)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

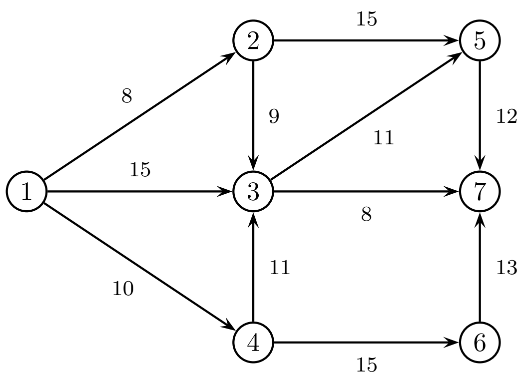
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min \ 14\ x_1 + 5\ x_2 \\ 10\ x_1 + 9\ x_2 \geq 68 \\ 8\ x_1 + 16\ x_2 \geq 57 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	92	63	43
2		26	55	57
3			10	12
4				14

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{35}, x_{13}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1\, x_2 \leq 0, \quad x_1^2 - 2x_1\, x_2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(-1,0)							
(0,1)							
(0,-1)							
(1,0)							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -6\, x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 - 4\, x_2^2 + 9\, x_1 - 9\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(3,-4)$, $(2,-5)$, $(0,4)$ e $(-3,2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 11\ y_1 + 3\ y_2 + 5\ y_3 + 7\ y_4 + y_5 + 4\ y_6 \\ 3\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - 3\ y_5 = 1 \\ -y_1 - 3\ y_2 + y_3 + 3\ y_4 - y_5 - y_6 = -9 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (3,\ -2)$	SI	NO
$\{1,\ 3\}$	$y = \left(\frac{5}{2},\ 0,\ -\frac{13}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{3,\ 6\}$	$(9,\ -4)$	$(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 10)$	1	$\frac{1}{3},\ \frac{5}{2}$	3
2° iterazione	$\{1,\ 6\}$	$\left(\frac{7}{3},\ -4\right)$	$\left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{26}{3}\right)$	2	$\frac{13}{5}$	6

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

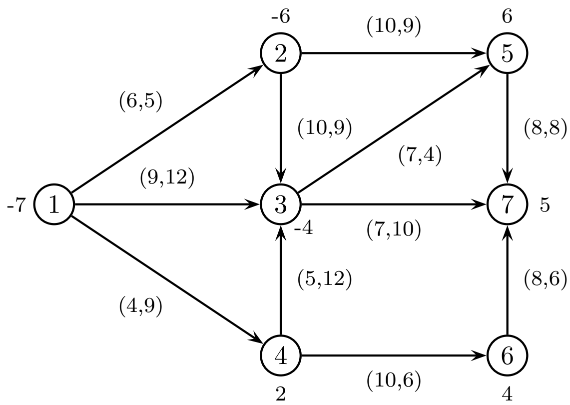
```
c=[ -5 ; -5.6 ; -6.4 ]                intlinprog=[]

A=[ 40 44 48 ; 40 36 42 ]             b=[ 80000 ; 95000 ]

Aeq=[]                                beq=[]

lb=[90 ; 80 ; 55]                     ub=[ ]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

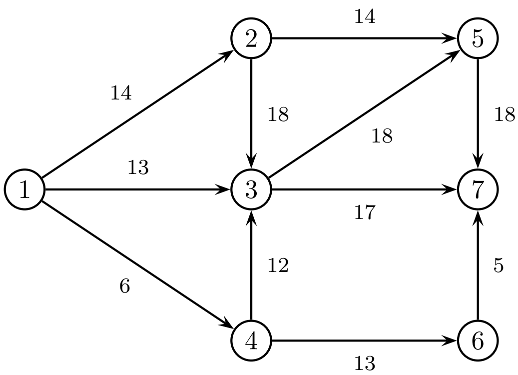


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,5) (3,5) (4,3) (5,7) (6,7)	(4,6)	$x = (0,\ 7,\ 0,\ 0,\ 6,\ 3,\ 0,\ -8,\ 6,\ 3,\ 2)$	NO	NO
(1,4) (2,3) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,3)	$\pi = (0,\ -1,\ 9,\ 4,\ 9,\ 14,\ 17)$	NO	SI

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

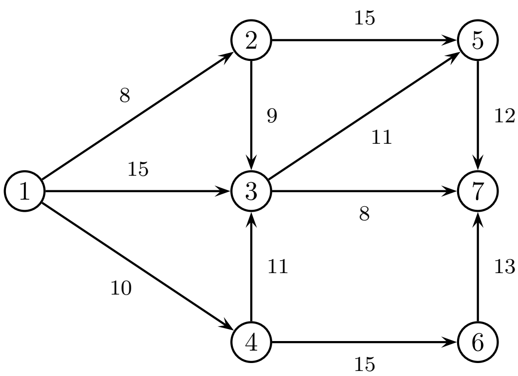
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,4) (2,5) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(1, 0, 6, 0, 7, 4, 0, 0, 4, 5, 0)	(0, 0, 7, 0, 6, 4, 1, 1, 4, 4, 0)
π	(0, 6, 9, 4, 16, 14, 24)	(0, −2, 9, 4, 8, 14, 16)
Arco entrante	(3,7)	(2,3)
ϑ^+, ϑ^-	3 , 1	9 , 4
Arco uscente	(1,2)	(5,7)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		3		2		6		7		5	
nodo 2	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 3	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1
nodo 4	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	31	3	28	2	28	2	28	2	28	2
nodo 6	$+\infty$	-1	19	4	19	4	19	4	19	4	19	4	19	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	30	3	30	3	24	6	24	6	24	6
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 5, 6, 7		5, 6, 7		5, 7		5		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	8	(0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0)	8
1 - 2 - 5 - 7	8	(8, 8, 0, 0, 8, 0, 8, 0, 0, 8, 0)	16
1 - 3 - 5 - 7	4	(8, 12, 0, 0, 8, 4, 8, 0, 0, 12, 0)	20
1 - 4 - 6 - 7	10	(8, 12, 10, 0, 8, 4, 8, 0, 10, 12, 10)	30

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 14\, x_1 + 5\, x_2 \\ 10\, x_1 + 9\, x_2 \geq 68 \\ 8\, x_1 + 16\, x_2 \geq 57 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{68}{9}\right)$ $v_I(P) = 38$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 8)$ $v_S(P) = 40$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $9\, x_1 + 8\, x_2 \geq 61$
$r = 4$ $3\, x_1 + 2\, x_2 \geq 16$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	92	63	43
2		26	55	57
3			10	12
4				14

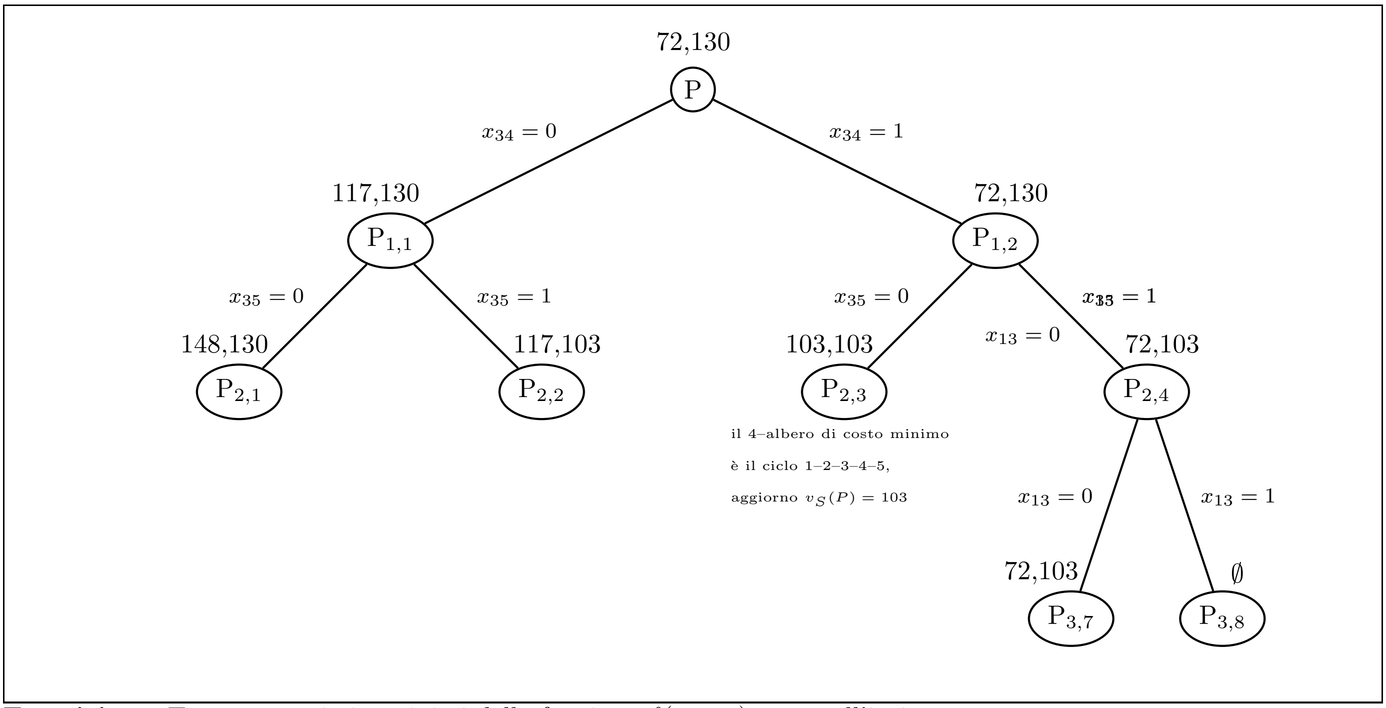
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: (1 , 2) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $v_I(P) = 72$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $2 - 1 - 5 - 3 - 4$ $v_S(P) = 130$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{35}, x_{13}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 x_2 \leq 0, \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-1,\ 0)$	$\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(0,\ 1)$	$(-1, 0)$		NO	SI	NO	NO	NO
$(0,\ -1)$	$(1, 0)$		NO	NO	NO	SI	NO
$(1,\ 0)$	$\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -6\ x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 - 4\ x_2^2 + 9\ x_1 - 9\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(3, -4)$, $(2, -5)$, $(0, 4)$ e $(-3, 2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right)$	$(1, -1)$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$(7, 7)$	$\dfrac{2}{21}$	$\dfrac{1}{12}$	$\left(\dfrac{35}{12}, -\dfrac{49}{12}\right)$