Esame di Ricerca Operativa del 17/2/20

Esercizio 1. Un caporeparto di una fabbrica deve decidere la composizione della sua squadra, avendo a disposizione operai e robot. Nel reparto si producono quattro tipi di beni A, B, C e D, e bisogna produrre almeno 50 quintali di bene A, 25 di bene B, 25 di bene C e 55 di bene D. Ciascun operaio o robot puó produrre ogni bene. Nella seguente tabella sono riportati i numeri di operai e robot necessari per produrre singolarmente un quintale di ciascuno dei beni A, B, C e D, i costi di manutenzione (per i robot) ed il salario (per un operaio) da minimizzare tenendo in considerazione che il numero totale di operai deve essere almeno 3 volte piú grande del numero di robot.

	A	B	C	D	costi
operai	8	15	4	4	8
robot	4	10	2	3	9

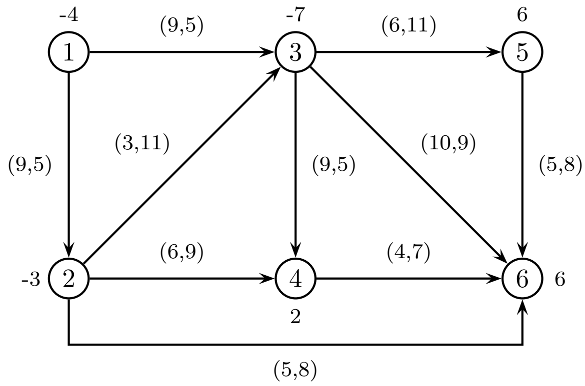
La soluzione 300 operai e 50 robot é ottima per il rilassato continuo? Se no, effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non quintali di bene ma scatole ognuna contenente un quintale di bene. Calcolare poi un taglio di Gomory.

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	41	62	92
2		27	54	56
3			11	13
4				94

Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 5. Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{35} e x_{15}. Se ci fosse l'obbligo di passare da uno tra gli archi $(1,2)$ e $(3,5)$ cosa cambierebbe nel modello? Come si potrebbe calcolare una valutazione superiore ed una inferiore?

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,3), (2,3), (2,4), (2,6) e (5,6), l'arco (3,5) come arco saturo e gli archi rimanenti in L, il flusso ottenuto é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi l'albero dei cammini minimi di radice 1 e scrivere il flusso ad esso associato. Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima ed il flusso massimo.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -2\,x_1\,x_2 + 4\,x_1 + 4\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(1,2)$, $(-2,-2)$, $(3,1)$ e $(5,-4)$.
E' un problema di ottimizzazione convesso? Eseguire un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe ed un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$. Il punto (0,0) é il massimo globale? Si puó dire che il minimo globale esiste ed é sul bordo del poliedro?

SOLUZIONI

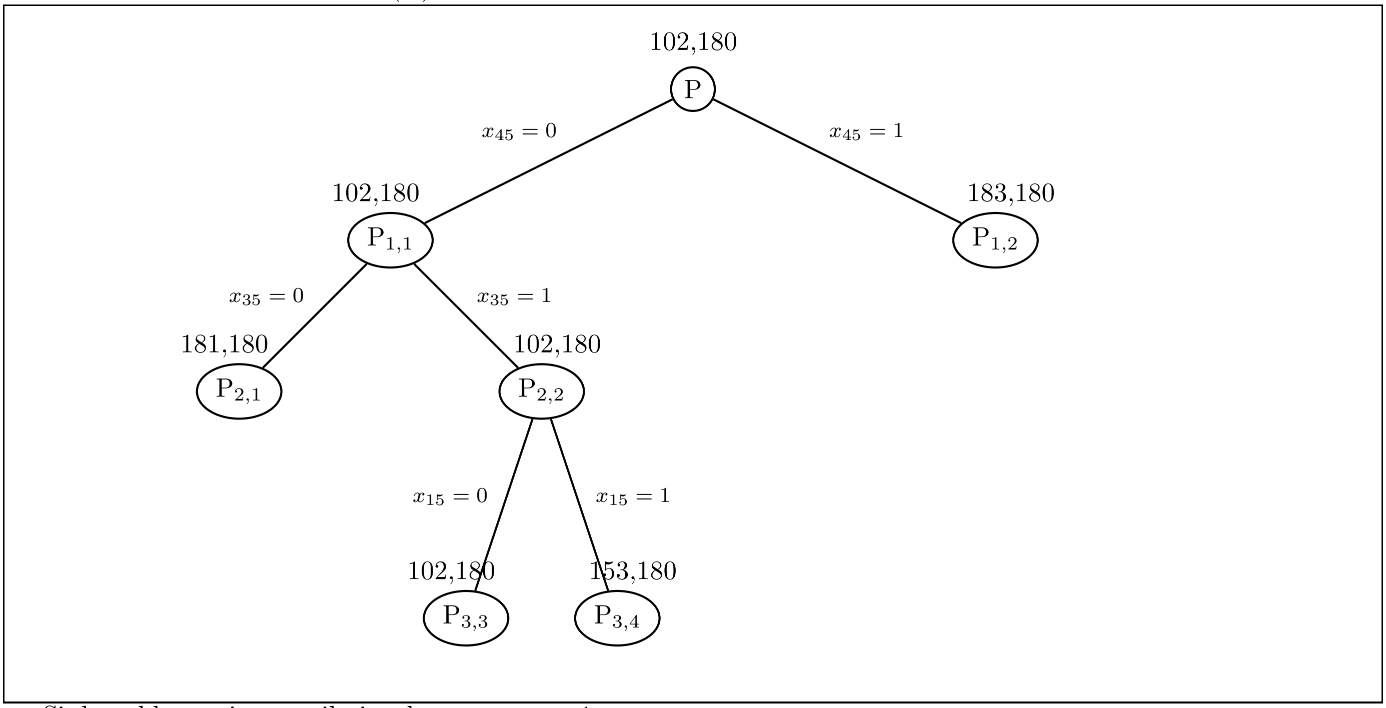
Esercizio 1.

COMANDI DI MATLAB

```
c=[ 8 ; 9 ]                                                    int=[ 1 ; 2 ]

A=[-1/8 -1/4 ;-1/15 -1/10 ;-1/4 -1/2 ;-1/4 -1/3 ;-1 3 ]         Aeq=[]

b=[ -50 ; -25 ; -25 ; -55 ; 0]                                  beq=[]

lb=[ 0 ; 0 ]                                                    ub=[]
```

La base é $(1,2)$ e la relativa soluzione duale é: $y = (-48, 210, 0, 0, 0, 0, 0)$. L'indice uscente é 1 mentre quello entrante é 5. La nuova base dá la soluzione ottima del rilassato continuo $(250, 83.333)$ che é una valutazione inferiore di valore 2750 mentre $(252, 84)$ é una valutazione inferiore di valore 2772. La soluzione ottima é $(252, 82)$ di valore 2754

Esercizio 2. 2–albero: (1 , 2) (1 , 3) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) con $v_I(P) = 102$.
ciclo: 5 – 3 – 4 – 2 – 1 con $v_S(P) = 180$.



Si dovrebbe aggiungere il vincolo $x_{12} + x_{35} = 1$.

Esercizio 3.

	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,3) (2,4) (2,6) (5,6)	(1,3) (2,4) (2,6) (3,5) (5,6)
Archi di U	(3,5)	
x	(0, 4, 0, 2, 1, 0, 11, 0, 0, 5)	(0, 4, 0, 2, 1, 0, 11, 0, 0, 5)
π	(0, 6, 9, 12, 6, 11)	(0, 15, 9, 21, 15, 20)
Arco entrante	(3,5)	
ϑ^+, ϑ^-	7 , 0	
Arco uscente	(2,3)	

L'albero dei cammini minimi é (1,2), (1,3), (2,4), (3,5) e (2,6). Il flusso ottimo é $x = (3, 2, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$. Ci sono due cammini aumentanti 1-2-6 e 1-3-6 entrambi di valore 5. Il flusso massimo ha valore 10 con $N_s = 1$

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$	$(1, 2)$	$\begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{4}{15}, -\frac{2}{15}\right)$	5	5	$(3, 1)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$	$2/3x_1 + 2/3x_2$	(3,1)	(4/3, -2/3)	1	(3,1)