Esame di Ricerca Operativa del 15/7/19

Esercizio 1. Una fabbrica di detersivi produce due tipi di saponi che passano attraverso 4 fasi di lavorazione: le ore necessarie per ogni fase di lavorazione per ogni quintale di prodotto sono riportate nella tabella che segue, in cui compaiono anche le ore mensili a disposizione per ciascuna fase ed il profitto ottenuto da ogni quintale venduto di sapone. La fabbrica vuole massimizzare il profitto.

Saponi	Fasi di lavorazione				Profitto
	A	B	C	D	
1	1,5	9	1,5	2,5	1100
2	15	2	2	4	10600
Ore disponibili	350	240	80	150	

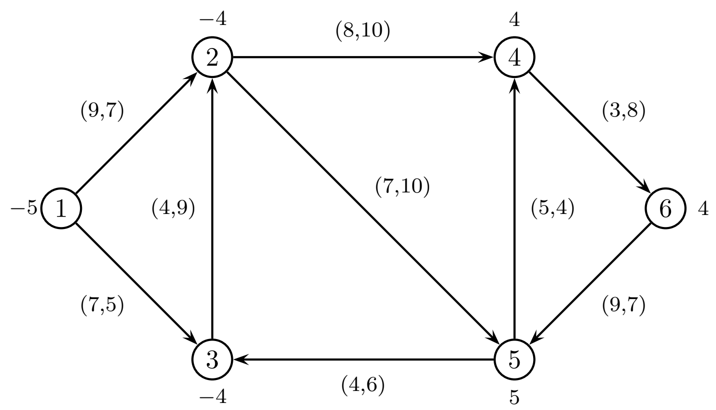
La soluzione $x = (0, 70/3)$ é ottima? Se no, effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non quintali di detersivo ma scatole di detersivo. Calcolare poi un taglio di Gomory.

Esercizio 2. Si consideri il problema di caricare (in modo binario) un camion di portata massima pari a 39 quintali, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti.

Beni	1	2	3	4	5	6
Valori	52	27	50	60	31	11
Peso	10	6	15	22	17	14

Calcolare una valutazione superiore considerando il rilassamento $x \geq 0$. La soluzione ottima di tale rilassamento continuo é un vertice? Se sí quale é la base? Scrivere l'equazione di un piano di taglio di Gomory. Calcolare poi una valutazione superiore considerando il rilassamento $0 \leq x \leq 1$. Eseguire l'algoritmo del Branch and Bound istanziando almeno 2 variabili.

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,3), (2,4), (2,5), (4,6) e (5,3), l'arco (3,2) come arco saturo e gli archi rimanenti in L, il flusso ottenuto é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi l'albero dei cammini minimi di radice 1 e scrivere il flusso ad esso associato e dire se é di base e se sí quale é la base. Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima ed il flusso massimo.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 14x_1 - 2x_2 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

E' un problema di ottimizzazione convesso? Eseguire un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe ed un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $x^k = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Trovare il minimo globale, se esiste.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max\ 1100\ x_1 + 10600\ x_2 \\ 1.5\ x_1 + 15\ x_2 \leq 350 \\ 9\ x_1 + 2\ x_2 \leq 240 \\ 1.5\ x_1 + 2\ x_2 \leq 80 \\ 2.5\ x_1 + 4\ x_2 \leq 150 \\ x_1 \in \mathbb{Z}_+ \\ x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

La base iniziale é $(1,5)$. L'indice uscente é il 5 mentre l'indice entrante é il 2. Il nuovo vertice é $(725/33, 465/22)$ che é anche la soluzione ottima. In caso di scatole va aggiunto il vincolo di interezza e quindi la soluzione ottima appena trovata é una valutazione superiore di valore 248212 mentre $(21,21)$ é la valutazione inferiore di valore 245700. Il taglio di Gomory é dato da $5x_1 + 30x_2 \leq 742$

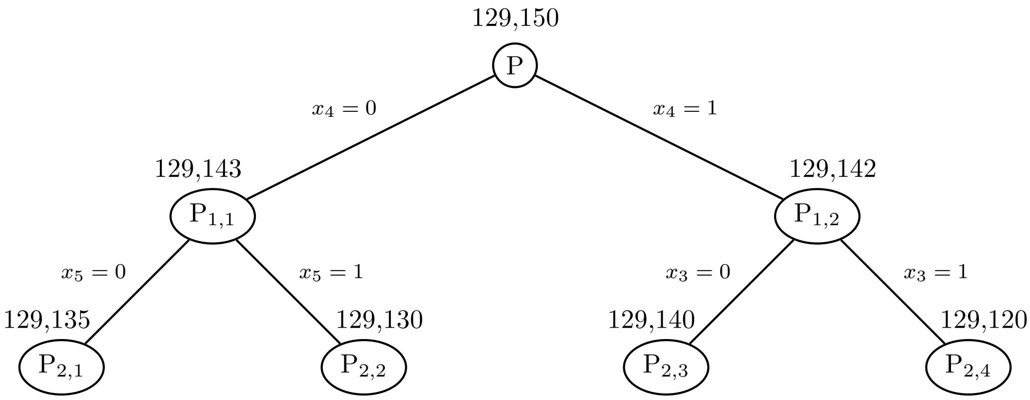
Esercizio 2. Dalla soluzione ammissibile $(1,1,1,0,0,0)$ ricaviamo una valutazione inferiore $v_I(P) = 129$. Una valutazione superiore é data $(\frac{39}{10}, 0, 0, 0, 0, 0)$, quindi si ha $v_S(P) = 202$. Per calcolare un taglio di Gomory aggiungiamo una variabile di scarto s. La base ottima é $B = \{1\}$, la matrice di base é $A_B = 10$, la matrice non di base é $A_N = (6\ 15\ 22\ 17\ 14\ 1)$ e $\tilde{A} = (\frac{6}{10}, \frac{15}{10}, \frac{22}{10}, \frac{17}{10}, \frac{14}{10}, \frac{1}{10})$.

$$\frac{6}{10}x_2 + \frac{5}{10}x_3 + \frac{2}{10}x_4 + \frac{7}{10}x_5 + \frac{4}{10}x_6 + \frac{1}{10}s \geq \frac{9}{10},$$

ricavando s

$$x_1 + x_3 + 2\,x_4 + x_5 + x_6 \leq 3.$$

La soluzione ottima del rilassamento continuo $0 \leq x \leq 1$ é $(1,1,1,\frac{8}{22},0,0)$, con $v_S(P) = 150$.



Esercizio 3.

	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (2,5) (4,6) (5,3)	(1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (4,6)
Archi di U	(3,2)	
x	(0, 5, 8, 5, 9, 4, 0, 0, 0)	(0, 5, 8, 5, 9, 4, 0, 0, 0)
π	$(0,\ -4,\ 7,\ 4,\ 3,\ 7)$	
Arco entrante	(3,2)	
ϑ^+, ϑ^-	$+\infty$, 0	
Arco uscente	(5,3)	

La sequenza dei cammini aumentanti é $1-2-4-6, 1-3-2-4-6$ con i δ pari a 7 e 1 rispettivamente, con flusso massimo $x = (7,1,8,0,1,8,0,0,0)$ di valore 8. Il taglio é $N_s = \{1,2,3,4,5\}$. L'albero dei cammini minimi é formato dagli archi (1,2), (1,3), (2,4)(2,5) e (4,6) con flusso $x = (4,1,2,1,0,1,0,0,0)$.

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento	Passo	Nuovo punto
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$(-1, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(0, 1)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$(0, 1)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$-(29/2)x_1 - x_2$	(1 ,0)	$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$	1	$(1, 0)$

Le soluzioni LKT sono $(0, 0)$ con moltiplicatori $(-14, -2, 0)$, $(1, 0)$ con moltiplicatori $(0, 3, 6)$ e $(0, 1)$ con moltiplicatori $(-15, 0, 0)$ quindi il minimo assoluto che sicuramente esiste é $x = (1, 0)$.