Fac-simile dell'esame di Ricerca Operativa

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

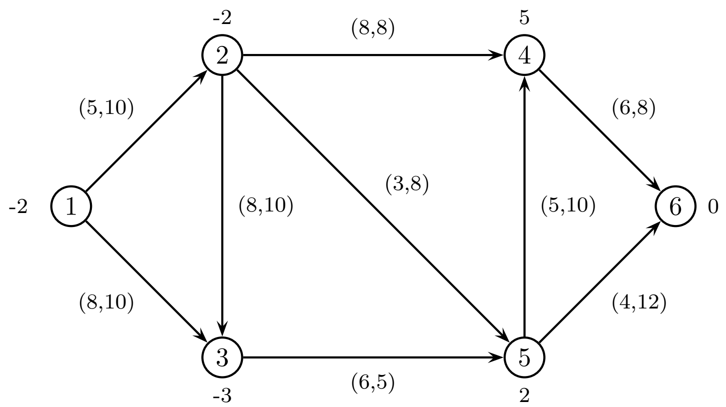
$$\begin{cases} \max\ -7\ x_1 - 2\ x_2 \\ -3\ x_1 + x_2 \le -2 \\ -x_1 - 2\ x_2 \le -3 \\ x_2 \le 4 \\ 3\ x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1 - 2\ x_2 \le 3 \\ -4\ x_1 - x_2 \le -5 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{2, 3}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,5}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

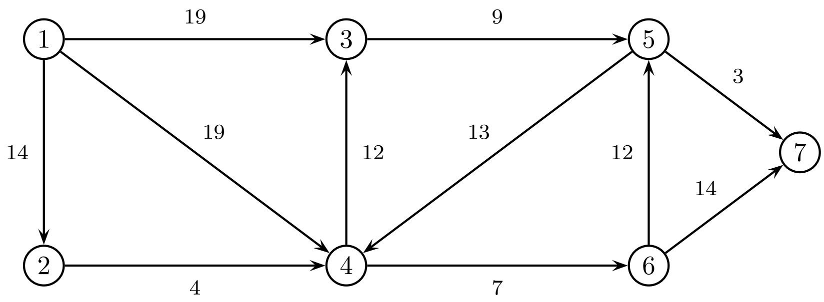


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (2,4) (2,5) (5,6)	(4,6)	$x =$		
(1,3) (2,3) (2,4) (5,4) (5,6)	(3,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 4. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

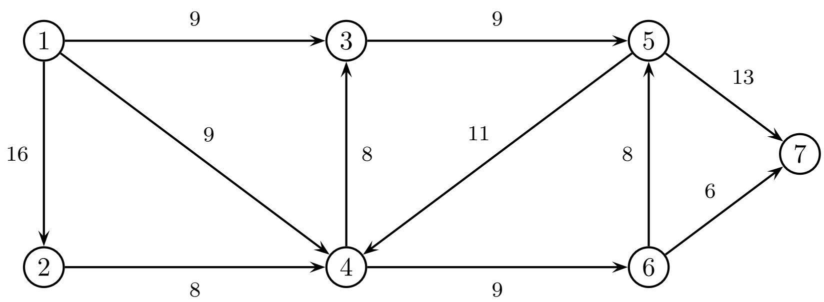
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,5) (4,6) (5,4)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 6. Una ditta produce latte liquido e in polvere. Il latte liquido viene venduto in cartocci da 1 l, ciascuno dei quali occupa un volume di 0.002 m^3. Il profitto ottenuto dalla vendita di 1 l di latte è di 1.20 Euro. Il latte in polvere viene venduto in barattoli da 2, 1.5 e 1 kg rispettivamente. Il costo che la ditta sostiene per la produzione di 1 kg di latte in polvere è di 5 Euro. La seguente tabella riporta i prezzi di vendita dei barattoli e i volumi occupati:

Barattolo	Prezzo (Euro)	Volume occupato (m^3)
2 kg	24	0.004
1.5 kg	16	0.003
1 kg	12	0.002

La ditta deve soddisfare la domanda di mercato stimata in 600 l di latte liquido e 200 kg di latte in polvere. Il latte prodotto sarà trasportato con un veicolo a temperatura controllata di capacità 28.3 m^3. Determinare quante unità dei diversi tipi di latte la ditta deve produrre per massimizzare il profitto e soddisfare le richieste di mercato.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 7. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	19	18	27
2		9	19	25
3			22	11
4				28

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{23}, x_{35}, x_{25}.

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 7\ x_2 \\ 9\ x_1 + 8\ x_2 \geq 52 \\ 18\ x_1 + 6\ x_2 \geq 59 \\ x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

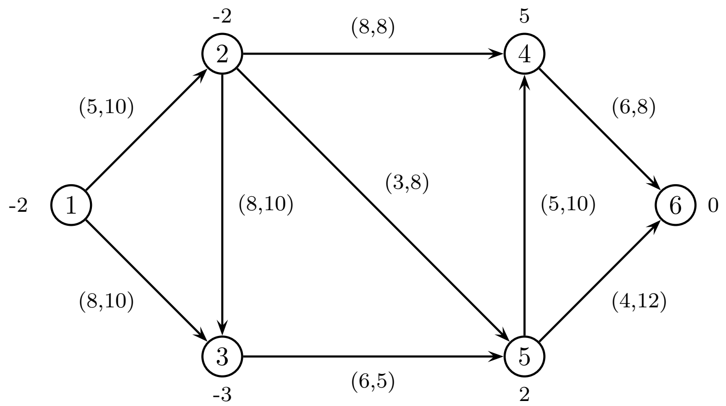
$$\begin{cases} \max\ -7\ x_1 - 2\ x_2 \\ -3\ x_1 + x_2 \leq -2 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq -3 \\ x_2 \leq 4 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 - 2\ x_2 \leq 3 \\ -4\ x_1 - x_2 \leq -5 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (1,\ 1)$	SI	SI
$\{2,\ 3\}$	$y = (0,\ 7,\ 12,\ 0,\ 0,\ 0)$	SI	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$(5,\ 1)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{16}{7},\ -\frac{1}{7},\ 0\right)$	4	$\frac{84}{5},\ 7,\ \frac{112}{9}$	2
2° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(3,\ 0)$	$(0,\ 4,\ 0,\ 0,\ -3,\ 0)$	5	$4,\ 16,\ 4$	1

Esercizio 3. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

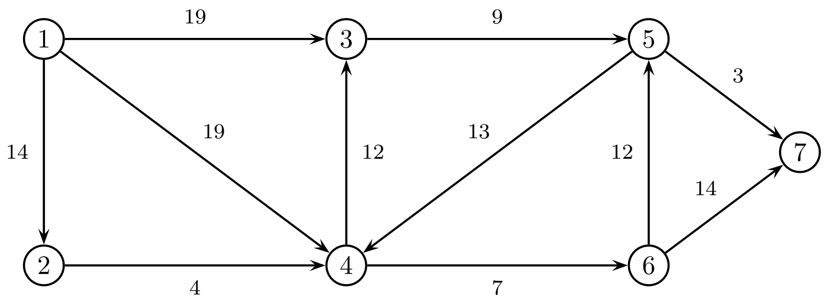


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (2,4) (2,5) (5,6)	(4,6)	$x = (5,\ -3,\ 0,\ 13,\ -6,\ 0,\ 8,\ 0,\ -8)$	NO	NO
(1,3) (2,3) (2,4) (5,4) (5,6)	(3,5)	$\pi = (0,\ 0,\ 8,\ 8,\ 3,\ 7)$	NO	SI

Esercizio 4. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

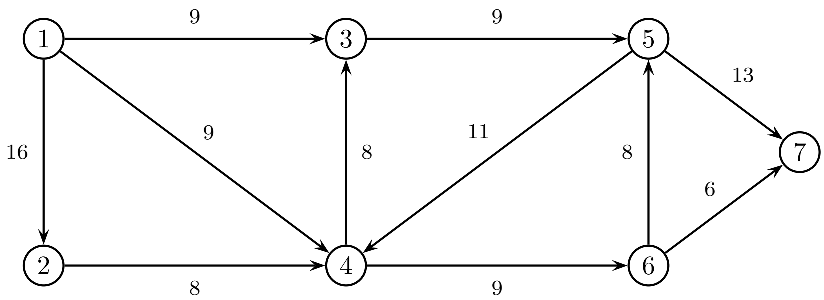
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,5) (4,6) (5,4)	(1,3) (2,3) (2,5) (4,6) (5,4)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	$(2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 5,\ 0,\ 5,\ 0)$	$(0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 5,\ 0,\ 5,\ 0)$
π	$(0,\ 5,\ 13,\ 13,\ 8,\ 19)$	$(0,\ 0,\ 8,\ 8,\ 3,\ 14)$
Arco entrante	(1,3)	(3,5)
$\vartheta^+,\ \vartheta^-$	10 , 2	6 , 0
Arco uscente	(1,2)	(2,3)

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		6		5		7	
nodo 2	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 3	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1
nodo 4	19	1	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	28	3	28	3	28	3	28	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	25	4	25	4	25	4	25	4	25	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	39	6	31	5	31	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4		3, 6		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	9	(0, 9, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 9, 0, 0)	9
1 - 4 - 6 - 7	6	(0, 9, 6, 0, 9, 0, 6, 0, 9, 0, 6)	15
1 - 4 - 6 - 5 - 7	3	(0, 9, 9, 0, 9, 0, 9, 0, 12, 3, 6)	18

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad N_t = \{5, 6, 7\}$

Esercizio 6. Una ditta produce latte liquido e in polvere. Il latte liquido viene venduto in cartocci da 1 l, ciascuno dei quali occupa un volume di 0.002 m^3. Il profitto ottenuto dalla vendita di 1 l di latte è di 1.20 Euro. Il latte in polvere viene venduto in barattoli da 2, 1.5 e 1 kg rispettivamente. Il costo che la ditta sostiene per la produzione di 1 kg di latte in polvere è di 5 Euro. La seguente tabella riporta i prezzi di vendita dei barattoli e i volumi occupati:

Barattolo	Prezzo (Euro)	Volume occupato (m^3)
2 kg	24	0.004
1.5 kg	16	0.003
1 kg	12	0.002

La ditta deve soddisfare la domanda di mercato stimata in 600 l di latte liquido e 200 kg di latte in polvere. Il latte prodotto sarà trasportato con un veicolo a temperatura controllata di capacità 28.3 m^3. Determinare quante unità dei diversi tipi di latte la ditta deve produrre per massimizzare il profitto e soddisfare le richieste di mercato.

variabili decisionali: x_1 = numero di cartocci di latte prodotti
x_2 = numero di barattoli di latte da 2 kg
x_3 = numero di barattoli di latte da 1.5 kg
x_4 = numero di barattoli di latte da 1 kg

modello:
$$\begin{cases} \max\ 1.2\ x_1 + 24\ x_2 + 16\ x_3 + 12\ x_4 - 5\ (2\ x_2 + 1.5\ x_3 + x_4) \\ x_1 \geq 600 \\ 2\ x_2 + 1.5\ x_3 + x_4 \geq 200 \\ 0.002\ x_1 + 0.004\ x_2 + 0.003\ x_3 + 0.002\ x_4 \leq 28.3 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4;\ x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 7. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	19	18	27
2		9	19	25
3			22	11
4				28

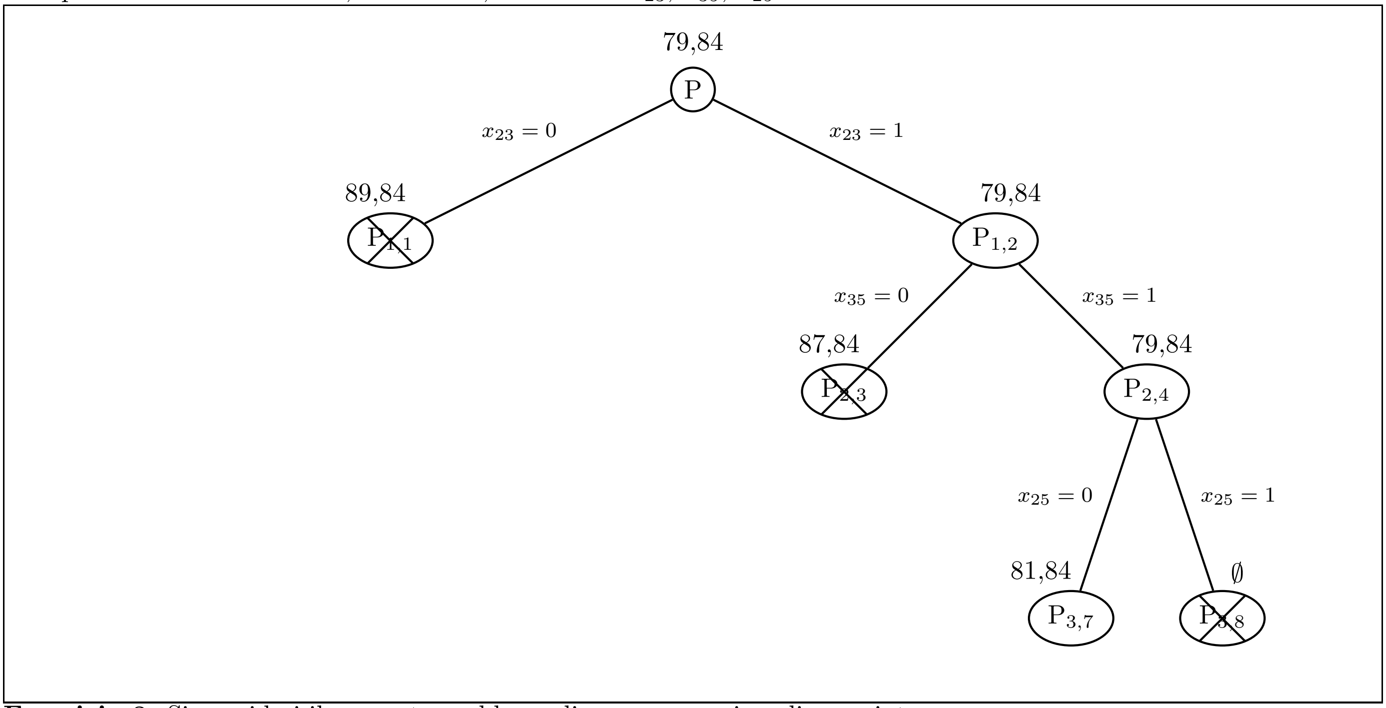
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 2) (1 , 4) (2 , 3) (2 , 5) (3 , 5) $v_I(P) = 79$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: 2 – 3 – 5 – 1 – 4 $v_S(P) = 84$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{23}, x_{35}, x_{25}.



Esercizio 8. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 7\ x_2 \\ 9\ x_1 + 8\ x_2 \geq 52 \\ 18\ x_1 + 6\ x_2 \geq 59 \\ x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{16}{9}, \frac{9}{2}\right)$	$v_I(P) = 50$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (2, 5)$	$v_S(P) = 55$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$	$17\,x_1 + 6\,x_2 \geq 58$
$r = 2$	$9\,x_1 + 7\,x_2 \geq 48$