

(Cognome)

(Nome)

(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Nelle due tabelle che seguono sono riportate le distanze reciproche (in km) tra 8 città della regione Toscana ed il costo (in milioni di euro) per costruire una stazione dei vigili del fuoco in ognuna delle 8 città:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	26	31	35	19	17	13	23
2	26	0	25	18	17	23	14	34
3	31	25	0	19	11	17	33	19
4	35	18	19	0	25	22	16	17
5	19	17	11	25	0	28	34	10
6	17	23	17	22	28	0	15	28
7	13	14	33	16	34	15	0	23
8	23	34	19	17	10	28	23	0

Cittá	Costo di costruzione
1	3
2	2
3	4
4	5
5	4
6	7
7	3
8	5

In ogni città dobbiamo decidere se costruire o no una stazione dei vigili del fuoco, in modo che per ogni città esista almeno una stazione distante al piú 20 km.

- Scrivere un modello matematico per minimizzare il costo totale di costruzione.
- Applicare l'algoritmo di riduzione.
- Determinare una valutazione superiore ed una inferiore.
- Scrivere i comandi Matlab e trovare la soluzione ottima.

Esercizio 2. Si consideri una rete di città le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

cittá	2	3	4	5
1	23	18	17	21
2		22	16	16
3			20	19
4				14

- Scrivere un modello matematico per trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla rete di città.
- Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2-albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 1. Applicare poi un passo dell'algoritmo di ricerca locale.
- Scrivere i comandi Matlab e trovare la soluzione ottima.

Esercizio 3. Una ditta tessile produce due tipi di filati X e Y usando due macchine A e B. Ogni metro di X prodotto richiede di essere lavorato 50 minuti sulla macchina A e 30 minuti su B. Ogni metro di Y prodotto richiede 20 minuti su A e 30 su B. All'inizio della settimana corrente, in magazzino ci sono 30 metri di X e 80 di Y. Durante questa settimana la macchina A puó lavorare al massimo 40 ore e la macchina B al massimo 30 ore. Per la fine della settimana, la ditta deve consegnare 70 metri di filato X e 90 metri di filato Y.

- Scrivere un modello matematico che determini il piano di produzione che massimizza le scorte dopo le consegne.
- Scrivere i comandi Matlab e trovare la soluzione ottima.
- Per aumentare la produttività sarebbe meglio avere piú ore disponibili della macchina A o della macchina B? Perché?

SOLUZIONI

Esercizio 1. La formulazione del problema é la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 7x_6 + 3x_7 + 5x_8 \\ x_1 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + x_8 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_8 \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_8 \geq 1 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 8 \end{array} \right.$$

Il problema può essere anche scritto nella forma classica di copertura dove il vettore c e la matrice A sono indicati nella tabella che segue:

c_j	3	2	4	5	4	7	3	5
$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	1	1	0	1	0
3	0	0	1	1	1	1	0	1
4	0	1	1	1	0	0	1	1
5	1	1	1	0	1	0	0	1
6	1	0	1	0	0	1	1	0
7	1	1	0	1	0	1	1	0
8	0	0	1	1	1	0	0	1

Osserviamo che é possibile effettuare una riduzione del problema: si ha che $A^6 \leq A^1 + A^3$ e che $c_6 = c_1 + c_3$, pertanto possiamo fissare la variabile $x_6 = 0$ ed eliminare la colonna 6. Inoltre $A^8 \leq A^3$ e $c_8 > c_3$, quindi fissiamo anche la variabile $x_8 = 0$ ed eliminiamo la colonna 8; infine le righe 3 e 8 sono uguali, pertanto si può eliminare la riga 8. Il problema così ridotto diventa:

c_j	3	2	4	5	4	3
$i \setminus j$	1	2	3	4	5	7
1	1	0	0	0	1	1
2	0	1	0	1	1	1
3	0	0	1	1	1	0
4	0	1	1	1	0	1
5	1	1	1	0	1	0
6	1	0	1	0	0	1
7	1	1	0	1	0	1

Quindi le soluzioni ottime del problema (PC) iniziale sono $x^1 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$ e $x^2 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$ di costo 7.

Esercizio 2.

2-albero: (1,3) (1,4) (2,4) (2,5) (4,5)

$v_I(P) = 81$

ciclo: 1-4-5-2-3-1

$v_S(P) = 87$

ciclo: 1-3-5-2-4-1

$v_S(P) = 86$

Esercizio 3. $x =$ metri di filato X prodotto durante la settimana, $y =$ metri di filato Y prodotto durante la settimana

$$\text{modello: } \begin{cases} \max (x + 30 - 70) + (y + 80 - 90) \\ 50x + 20y \leq 40 * 60 \\ 30x + 30y \leq 30 * 60 \\ x + 30 \geq 70 \\ y + 80 \geq 90 \end{cases}$$

$c = [-1 \ -1]$

$A = [50 \ 20 \ ; \ 30 \ 30]$

$b = [2400 \ ; \ 1800]$

$A_{eq} = []$

$b_{eq} = []$

$lb = [40 \ ; \ 10]$

$ub = []$

soluzione ottima: (40,20)

$v(P) = 60$