Esame di Ricerca Operativa del 12/9/19

Esercizio 1. Un'industria produce A e B che devono passare da entrambi i reparti X e Y. La quantitá prodotta di A deve essere almeno il 50% di quella prodotta di tipo B. I tempi di lavorazione in ore per tonnellata di prodotto e la disponibilitá in ore a settimana dei due reparti sono date dalla seguente tabella. Sapendo che il prodotto A fornisce un guadagno di 250 euro per tonnellata mentre quello B di 300 determinare il piano di produzione settimanale che massimizza il guadagno.

	A	B	Disponibilitá
Reparto X	2	1.5	103
Reparto Y	0.5	1	51

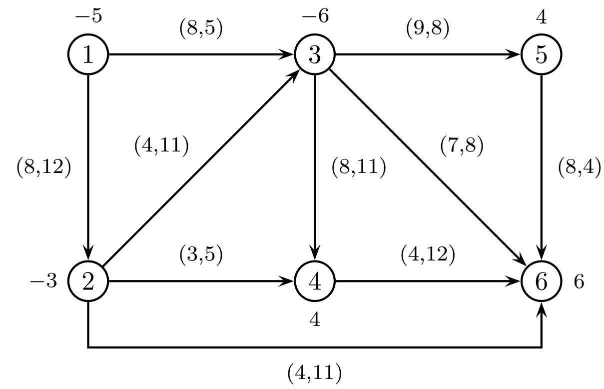
La soluzione $x = (20.4, 40.8)$ é ottima? Se no, effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non tonnellate di prodotto ma scatole. Calcolare poi un taglio di Gomory.

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	20	24	31	12
2		29	28	8
3			26	22
4				21

Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo. Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 4. Il ciclo cosí trovato é l'assegnamento di costo minimo? Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{12}, x_{15}, x_{25}. Siamo arrivati all'ottimo?

Esercizio 3. Su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (2,4), (3,4), (3,5) e (4,6), l'arco (1,3) come arco saturo e gli archi rimanenti in L, il flusso ottenuto é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi l'albero dei cammini minimi di radice 2. Cosa si puó dire se venisse applicato l'algoritmo del simplesso? Fare un passo dell'algoritmo del simplesso per trovare il flusso massimo 1 a 6 partendo dalla soluzione $x = 0$.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 2\ x_1^2 + 10\ x_1 + 5\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(0, 2)$, $(-3, 0)$, $(-2, 3)$ e $(-1, -3)$.

E' un problema di ottimizzazione convesso? Eseguire un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe ed un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $x = (-\frac{5}{3}, -2)$. Trovare il minimo globale, se esiste.

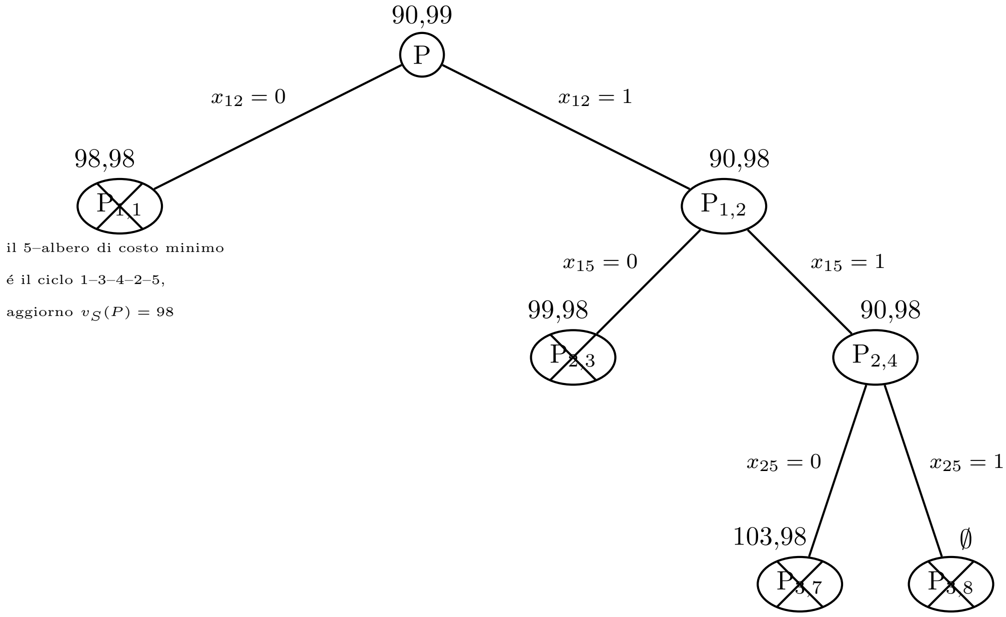
SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max 250\, x_A + 300\, x_B \\ 2\, x_A + 1.5\, x_B \leq 103 \\ 0.5\, x_A + x_B \leq 51 \\ -2\, x_A + x_B \leq 0 \\ x_A, x_B \geq 0. \end{cases}$$

La base iniziale é $(2, 3)$. L'indice uscente é il 3 mentre l'indice entrante é 1. Il nuovo vertice é $(21.2, 40.4)$ che é anche la soluzione ottima. In caso di scatole va aggiunto il vincolo di interezza e quindi la soluzione ottima appena trovata é una valutazione superiore di valore 17420 mentre $(21, 40)$ é la valutazione inferiore di valore 17250.
Il taglio di Gomory é dato da $2x_1 + 2x_2 \leq 123$.

Esercizio 2. 5–albero: (1 , 2) (1 , 3) (1 , 5) (2 , 5) (3 , 4) con $v_I(P) = 90$; ciclo: $4 - 5 - 2 - 1 - 3$ con valore $v_S(P) = 99$.



Il ciclo ottimo é 1–3–4–2–5 di valore 98.

Esercizio 3.

	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,4) (3,4) (3,5) (4,6)	(1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (4,6)
Archi di U	(1,3)	(2,4)
x	(0, 5, 0, 3, 0, 7, 4, 0, 6, 0)	(2, 3, 0, 5, 0, 5, 4, 0, 6, 0)
π	(0, 8, 3, 11, 12, 15)	
Arco entrante	(1,3)	
ϑ^+, ϑ^-	2, 5	
Arco uscente	(2,4)	

L'albero dei cammini minimi é formato dagli archi (2,3), (2,4), (2,6) e (3,5). Il nodo 1 non é raggiungibile.

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{5}{3}, -2\right)$	$(-3, -2)$	$\begin{pmatrix} \frac{4}{13} & -\frac{6}{13} \\ -\frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix}$	$\left(\dfrac{2}{3}, -1\right)$	1	1	$(-1, -3)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{5}{3}, -2\right)$	$\frac{10}{3}\, x_1 + 5\, x_2$	(-1 ,-3)	$\left(\frac{2}{3}, -1\right)$	1	$(-1, -3)$

Il gradiente non si annulla mai e quindi il minimo assoluto, che sicuramente esiste, é $x = (-1, -3)$.