**Esame di Ricerca Operativa**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 - 2\ x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq -4 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{5,\ 6\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

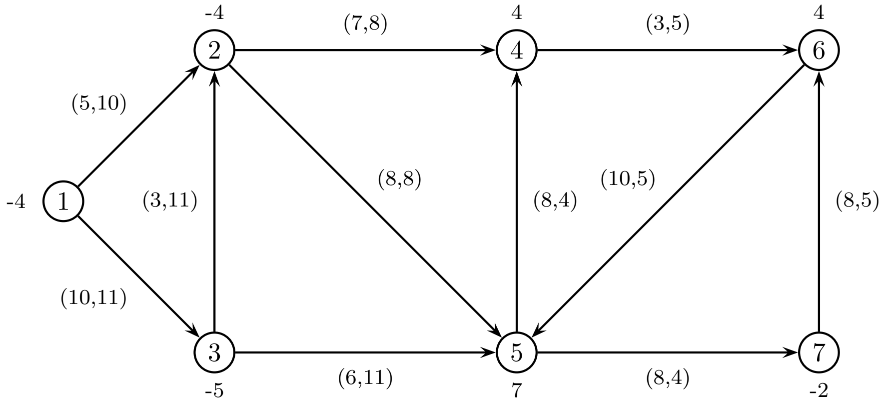
| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {3,7} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una fabbrica automobilistica produce tre tipi di autovetture $T_1$, $T_2$, $T_3$ negli stabilimenti $S_1$, $S_2$, $S_3$. La capacitá di produzione mensile degli stabilimenti $S_1$, $S_2$, $S_3$ é data da 100, 80 e 100 autovetture rispettivamente ed il costo di produzione di una singola autovettura di tipo $T_i$ nello stabilimento $S_j$ e' dato da $c_{ij}$, $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3$. Sapendo che la produzione mensile deve essere di almeno 80 autovetture per ogni tipo e che la produzione dello stabilimento $S_1$ deve essere almeno il 30% della produzione complessiva, si scriva un problema di programmazione lineare per determinare la quantitá di macchine da produrre mensilmente in ciascun stabilimento in modo da minimizzare il costo complessivo di produzione.

variabili decisionali e modello:

comandi linprog o intlinprog:

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

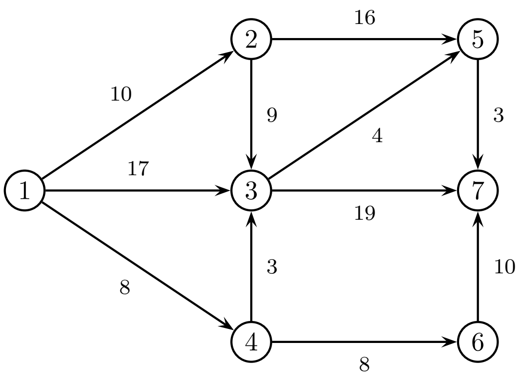



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (3,2) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6) | (5,7) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,3) (2,5) (5,4) (5,7) (6,5) | (7,6) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

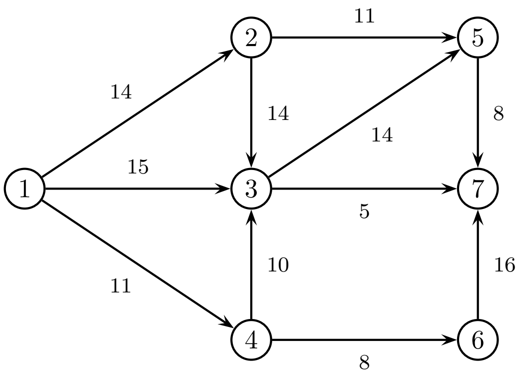
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (6,5) (7,6) | |
| Archi di U | (5,4) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 7\ x_2 \\ 13\ x_1 + 10\ x_2 \geq 58 \\ 12\ x_1 + 18\ x_2 \geq 58 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 15 | 20 | 63 | 45 |
| **2** | | 97 | 57 | 57 |
| **3** | | | 12 | 9 |
| **4** | | | | 15 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{45}$.

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 - 2\,x_2 \\ -2\,x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq -5 \\ 3\,x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq -4 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (2,\ -8)$ | SI | NO |
| $\{5,\ 6\}$ | $y = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0)$ | NO | SI |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3,\ 7\}$ | $(3,\ -4)$ | $(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -3)$ | 7 | $2,\ \frac{5}{2}$ | 1 |
| 2° iterazione | $\{1,\ 3\}$ | $(1,\ -6)$ | $(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ | 3 | $3,\ 5,\ \frac{33}{5}$ | 2 |

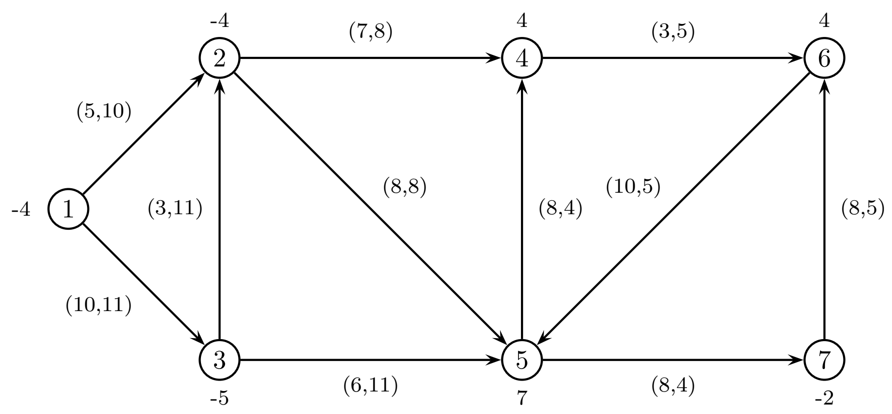
**Esercizio 3.**

Variabili decisionali:
$x_{ij}$ = quantita' di macchine di tipo $T_i$ prodotte mensilmente nello stabilimento $S_j$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$;

Modello:

$$\begin{cases} \min\ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 80 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 100 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 80 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 80 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 80 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 0.3 \left( \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \right) \\ x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in \mathbb{Z},\ i = 1,2,3,\ j = 1,2,3, \end{cases}$$

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

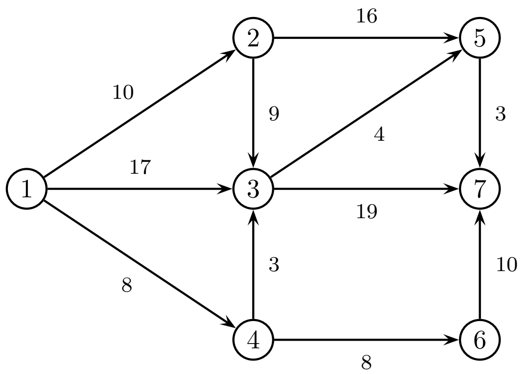


| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (3,2) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6) | (5,7) | $x = (0,\ 4,\ 0,\ 0,\ -4,\ 13,\ -2,\ 2,\ 4,\ 0,\ 6)$ | NO | NO |
| (1,2) (1,3) (2,5) (5,4) (5,7) (6,5) | (7,6) | $\pi = (0,\ 5,\ 10,\ 21,\ 13,\ 3,\ 21)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

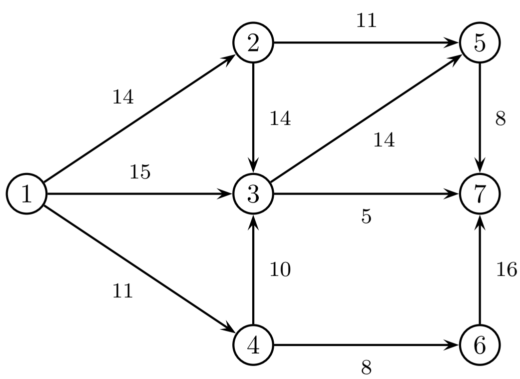
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (6,5) (7,6) | (1,3) (2,4) (2,5) (3,5) (4,6) (7,6) |
| Archi di U | (5,4) | (5,4) |
| $x$ | (0, 4, 4, 0, 0, 9, 4, 4, 0, 2, 2) | (0, 4, 2, 2, 0, 9, 2, 4, 0, 0, 2) |
| $\pi$ | $(0,\ -4,\ 10,\ 3,\ 16,\ 6,\ -2)$ | (0, 8, 10, 15, 16, 18, 10) |
| Arco entrante | (2,5) | (1,2) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 8 , 2 | 6 , 4 |
| Arco uscente | (6,5) | (1,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 2 | | 3 | | 5 | | 6 | | 7 | |
| nodo 2 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 |
| nodo 3 | 17 | 1 | 11 | 4 | 11 | 4 | 11 | 4 | 11 | 4 | 11 | 4 | 11 | 4 |
| nodo 4 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 26 | 2 | 15 | 3 | 15 | 3 | 15 | 3 | 15 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 16 | 4 | 16 | 4 | 16 | 4 | 16 | 4 | 16 | 4 | 16 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 30 | 3 | 18 | 5 | 18 | 5 | 18 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 3, 5, 6 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 5 | (0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0) | 5 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 8 | (8, 5, 0, 0, 8, 0, 5, 0, 0, 8, 0) | 13 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 8 | (8, 5, 8, 0, 8, 0, 5, 0, 8, 8, 8) | 21 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $N_t = \{6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 7\ x_2 \\ 13\ x_1 + 10\ x_2 \geq 58 \\ 13\ x_1 + 18\ x_2 \geq 58 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{29}{5}\right)$ $v_I(P) = 41$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 6)$ $v_S(P) = 42$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $12\, x_1 + 9\, x_2 \geq 53$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 15 | 20 | 63 | 45 |
| **2** | | 97 | 57 | 57 |
| **3** | | | 12 | 9 |
| **4** | | | | 15 |

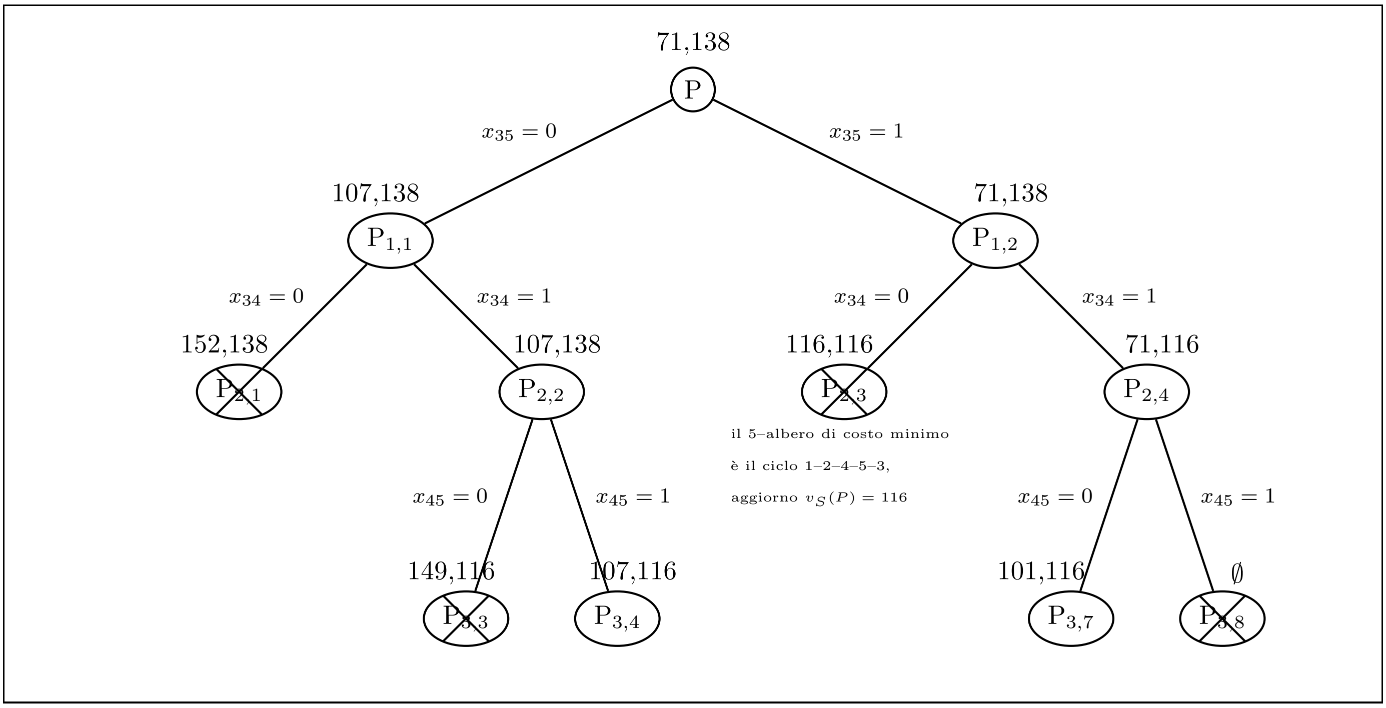
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $v_I(P) = 71$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 2 - 4 - 3 - 5$ $v_S(P) = 138$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{45}$.



71,138
P
$x_{35} = 0$
$x_{35} = 1$
107,138
$P_{1,1}$
71,138
$P_{1,2}$
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
152,138
$P_{2,1}$
107,138
$P_{2,2}$
116,116
$P_{2,3}$
71,116
$P_{2,4}$
il 5–albero di costo minimo
è il ciclo 1–2–4–5–3,
aggiorno $v_S(P) = 116$
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
149,116
$P_{3,3}$
107,116
$P_{3,4}$
101,116
$P_{3,7}$
$\emptyset$
$P_{3,8}$