Università degli Studi di Pisa Corso di Laurea Magistrale in Informatica Anno Accademico 2021-2022

Insegnamento di

Foundation of Computing

Pagina del corso: http:/pages.di.unipi.it/montanari/FOC.html

Note di

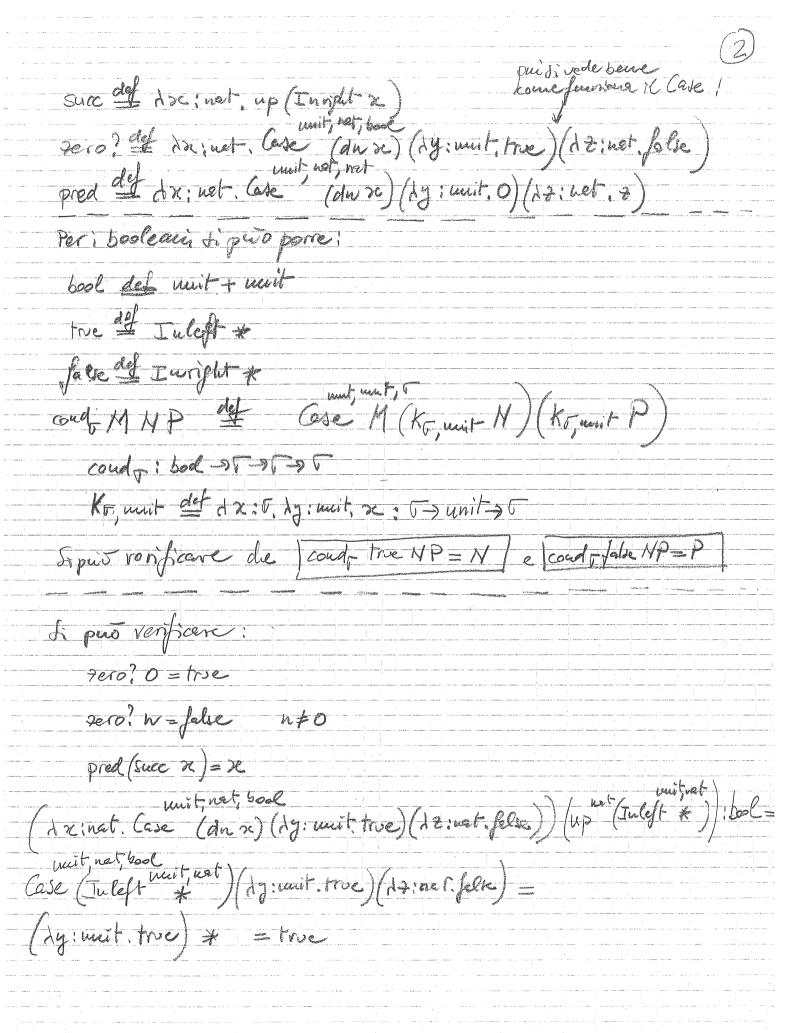
Tipi Ricorsivi, Adeguatezza Computazionale e Tipi Polimorfi

Libro di Testo: J. Mitchell, Foundations for Programming Languages, MIT Press, 1996.

a cura di Ugo Montanari Dipartimento di Informatica Università degli Studi di Pisa ugo@di.unipi.it

I ha neorsini

si aggingous vanidore alla sinteti dei tysie une move esponsione di lipo s considerace pero solo termini d'lips dirosi 0: 1 t/ ut. 5 Hornatmente l'epissone t= pet. T viene prese coure 150 morfismo (dei comspondenti instrui) Mt. C @ [Mt. V/H] [Associati ad opui tipo vi corriro at too due function: dn: nt. +> [ut. 5/4] 5 us: [ut. c/+] - > ut. c (on i sequenti a mouni epua rondi: an (up/1)=M uputit (du M)=M (up/dn) Esemps Junuer ustwell, suce, prede tero? nat # pt, witte Of up (Inleft *): not Inleft * unit not up (Inleft *): not up (Inleft *): not up (Inleft *): not n det up (Inright up (Inright in up (Inleft *) in)); net



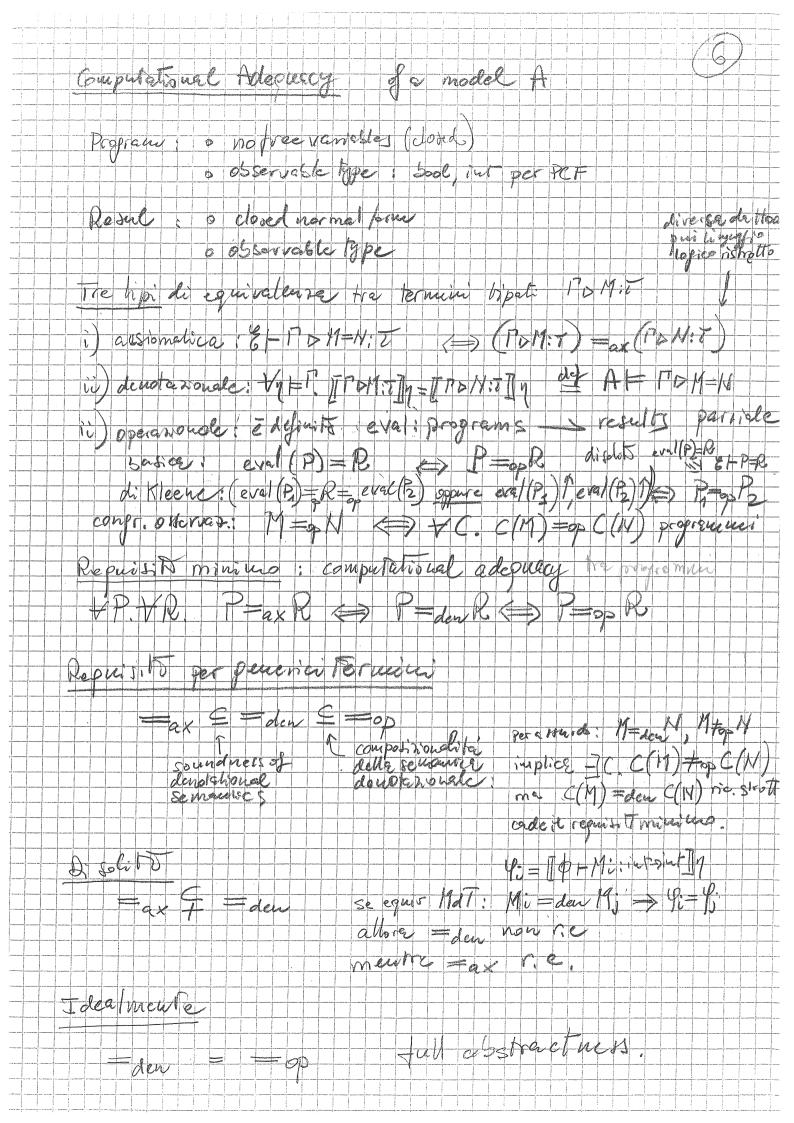
```
Ex. 2.6.7 p. 131 Untyped 1-caladus
   U1:= x/UU/Az.U
assour
                                 g & FY (U) (R)
   るな、リニオタ「タか」り
                                                 (3)
  (xx.U) U= [U2/x]U1
                                 \times \neq \neq \forall (v)
  \partial x \cdot U x = U
Se = pt. + > t l'unico lips du (up M) = M
du: > > > up: ( > > ) -> up (dw) = M
fa [U] = x : , , , x n: DM: con {x, in, x n y = FV(U)
per indunque:
    [x] = x:0 >x:0
   [U,] = 17 0 Mise [U2] = 12 0 M20 FV(0,02) = 2xx, warws
         [[U,U2]] = x2:0, ", 2, 00 p dno M, M2:0
    \|U\| = \|P\| M \| = \{V(A > \epsilon, U) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}
   [Ax. U] = x(sio, m) x(n; o D up Ax: o. M: o
  Di uno striam (B)
 [(Ax.U,)U2]= 17 > dn' (up dx: .M)N = (Ax: .M)N
```

 $\mathbb{I}(\Lambda \times V_1)U_2] = \Gamma \times dn (up \wedge x : \cdot M)N = (\Lambda \times \cdot \cdot M)N$ $= [M/X]N : \cdot = [[U_2/X]U_1]$ where $[U_1] = [\nabla N] [U_2] = [\nabla M]$ $\Gamma = \{x_1; \cdot, u_1, x_1; \cdot\} \text{ with } \{x_1 \cdot x_1\} = F \times (((x, U))U_2)$

E'postale avere termini seuse former normale! I= da. oca [II] = po dn (up Ax: o. dn'xx) (up Ax; o, dn'xx) (Ax: o.dnixx) (up Az: o.dnixx) -> ax dn' (up dz: o.dnixx) (up dz: o.dnixz) -> -> "" Escupso di pogazione ALOR velle pagina successiva ESSTOUN speratredi point fisso wel 1-alob non tipal Test of. (Ax. f(xx))(Ax. f(xx)) 71=(21.(2x.f(xx))(2x.f(22))) == $M_{\text{per}}(\lambda \times J(x \times 1)) \lambda \times J(x \times 1) + 3$ $J(\lambda \times J(x \times 1)) \lambda \times J(x \times 1) = JM_{\text{f}}$ Esiste ande un altro sperature (1) = (12.4. f(x x f)) (12. f(x x f)) direttemente can le proprieté

Distribution de la proprieté

Distr La traduzione fumone, ma noi vogliano un op. punt fill che vada bene can selfareto per il tipo o, ma ande per gen altrolipo 5, cécé fix5:(5-95) -95



l'introdurre de gen. = op nou use

Tred e

surjective pening Computational Hologuacy peril PCF 3 interprets determination in the sounded consister parally appear ist, come consequences? Dat Aper abbians = ax & = den del teoreus generale di sound ness dei wodelli di treukingeda Turing P=denR => P=opR per Per dimostra re Mprogram Nresult usiano un teorena di approsime none. Approximate Normal Form di un termine M NE anf (M) se è ottem to applicant alcune nouvour ad M

e poi sosti binendo quitermine hore in uf con L

Quindi se N non contrene L, allore M >> N normal.

Se M ha forme normale >> anf (M) è fruito le auf (M) o infinito → tutre approximazioni di una sortior sintellier infinito detta il "Balle Trec". Police Doug (M)]]y = LEPON: VJN HE auf (M) dove III=1 la sementies corretté é ou masséroraute de sprossiment Lewer de [auf(M)]n => d = [FDM: F]n. Dans un liente al nunero di volte de si applice fix. - fixo. lab (M) è l'insieur dei l'exneiri dervici a M de 1 sos l'hintee bibled fix " ou fix lab-reduction: fix of of the fix of si usano questo due regole invece di que la delfix かくのうけいので、上の Theorem: lab-reduction à confluent & Terminaling

Lewere PEleb (M) P-Mas Normal > NEarly (M)

Approximation theorem: [[PDM:F]] = V[Iab(M)]] n

= V[auf(M)]] n

Grollawo APCF = P=R Peropreu Risult

over per n

soundners n

P > R PER E computationally adequate

P > R PER PCF

Prova Se APCF = P=R, example i hipsi offervalational net essel detain

per l'approximation.

Prove Se ARCF = P=R, exendr i bijoi o Herrabali not essol dotali di un do minio piato, deve esister NE anf (P) con ARF = N=R.

Anti, addivitura N=R (sintellica mente!). Jufoto se una forme normale chiuse di bipo nat o sool contiene I, alleve [C] = I (aa as. of mether 3 else I con è in forme conmale!);

ma [N] # I essendo [N] = [R], R regult; quindi N

e una forme normale nan approximanta; quindi Nè un result;
quindi N=R dalo che [N] = [R]. Duirliabbiano P >> N=R.

e per il tiorene di forma normale mina.

Non-ful asstractues del PCF den op ESTOTI IN APCE por: $B_1 \rightarrow B_1 \rightarrow B_1$ por true > = true por > true = true por false felse = false < partifle perobuse monotote, find continua Teorene: ma esiste un termine PCF POR:600l > 500l > 500l PORMN > True J M >> twe or N >> true

Jalse J M >> false and N >> folle no no runt frue offerwise Hint Lopers as ridurione lary (determinister) che e completo per bod/nati si dinostra de deto un pushingue courses on Kholes CL-,-, m, -], o si amire a una prince normale de condépende dagli aspensenti, oppure esite un ben precio argonout o de deve estere valurati

dall'interpretet. Ma in PORIJITZ puerts upen basto: Le l'arpourent e I I allore
POR direge baltive /> see [] allere for true diregents
con directe = fix, (4x; (0 1x): 0, 17
In PCF postials part serivere: Is-POR? M direseper 1s_ROR? Left A Pisool - 2600l - 2600l . Part
if Pirve diverge them if Palve the diverge else true else diverge
else avege: (bool-5 bool-5 bool)-3 500C
Is POR? = op 1 P. Sool > Gool > Gool -> Gool -
Nou estré mesan converts-propone de la distingue Perasondo. La CIIS-POR? Je CTAP: diverpe J modiverge e uno co
(Je entranto: convergono a noutroto divers si pas malficero (). Ma allara CI_3 deve quandare il duo arponento.
e quivali autrounts d'rogono.
Invece [Is POR] = dec [INP. Sed > bol > bol diverge] in April
dot de [Is POR] por = true montre INP. 6008 3 5008 35008 Mrege Dpor = Loc

PCF+por

s'agfinge la outante por: bool à bool à bool à bool à bool à videntione:

por true M - strue por M me - strue por false false - stalse

e [Por] = por

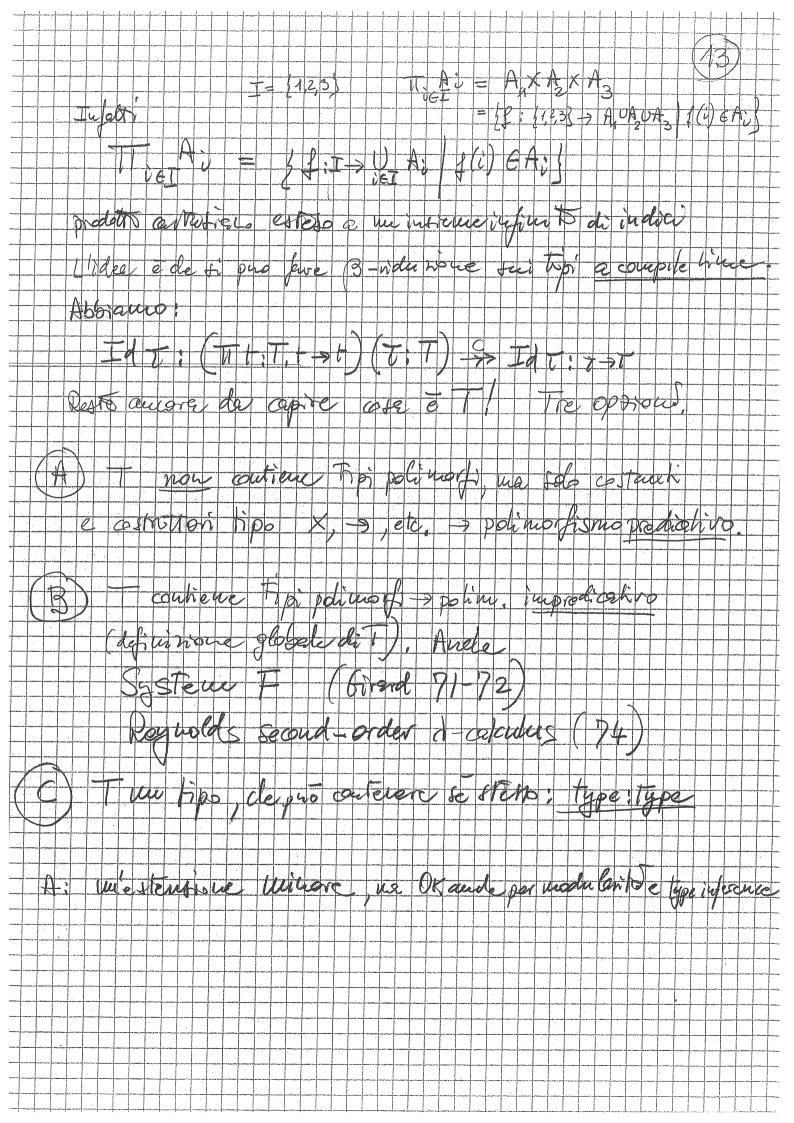
si vede de:

- · reduction for PCF+ por è confluence
- · lab-reduction à ouflieurs e terminating
- -> approximation Heorem & adequacy results

Teorus (PlotKin):

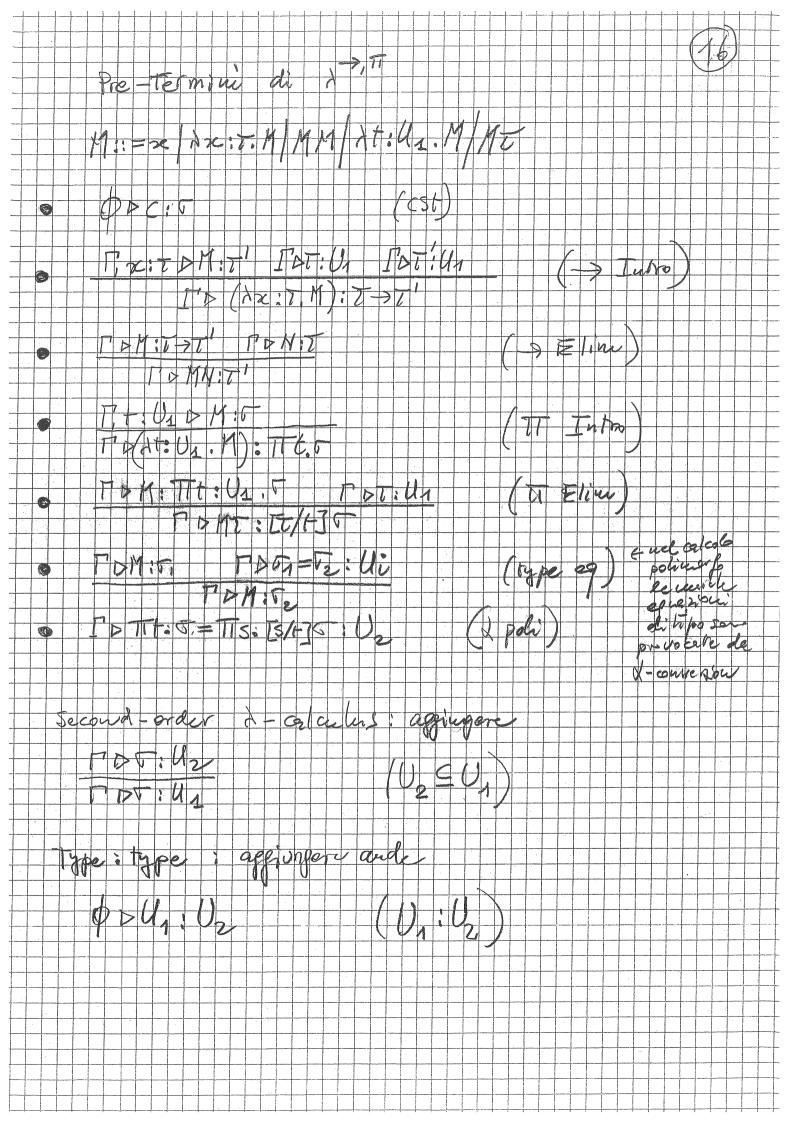
Per PCF+por abbianco: = den = = ap.

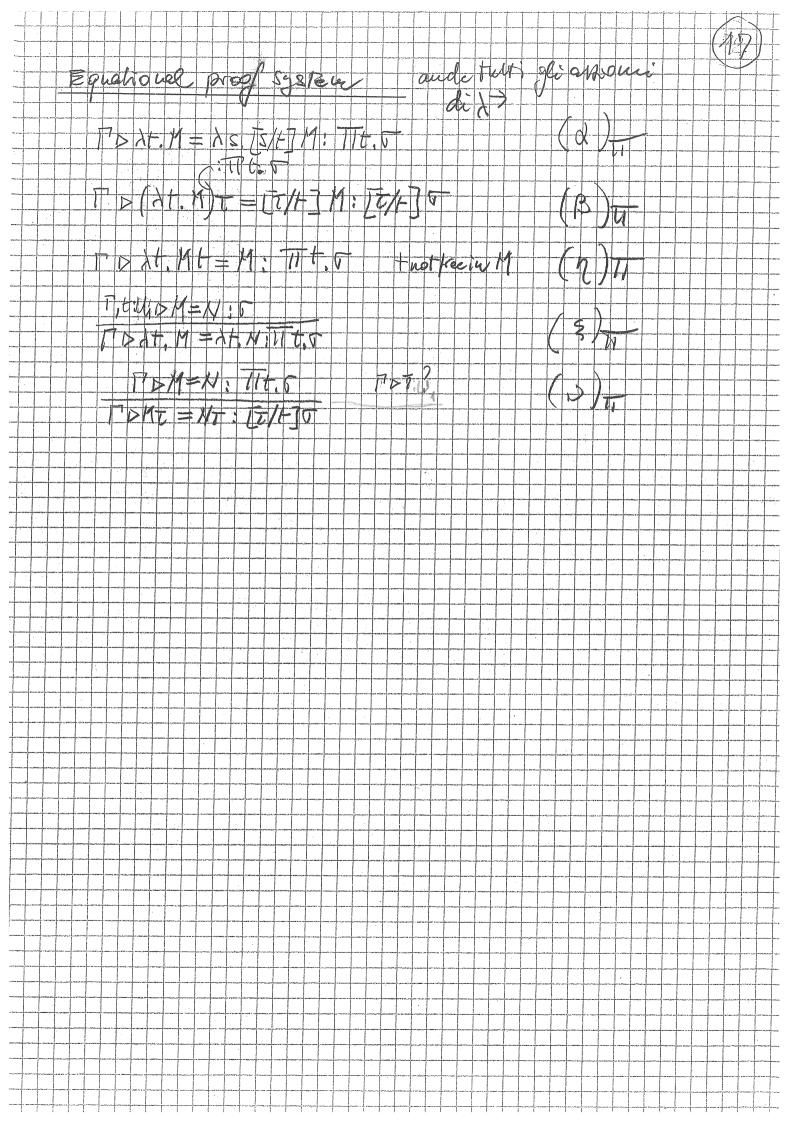
Polimonf smp Our fuernous policiones puro enere applicate ad wolli algoritour de nou dipendous programmen dal ho di cert argomenti hoc poly worph's in sait pi, course usquedo il Escupió composizione of i nat + hat de net + hat hat i hia sele qui policion 11:59t, 29: 1-95.02:0 variabili de denstavo hoi. astranone/applicatione su questo vantoli Ar:T. As -TATIT, compose paro accord pu soughe AtiTinaitz no rphic Quelle e il hope di Id 3t >t perch con va bene Hugh & Cegat Serive 4:17. TTH: T. t->t oppure probably set teare his on less intience infinited indice



B: Molto pur compliant, molts importante la studios. Francis de pus esere applicato al sus tre do lips (At: T. Az: t. re) (Ttt: T. + >t) -> Az: (Tt: T. + >t). 2c otherendo una fun none de può esser applicate a Id!! 12 (TIT: 1. +>02/10tit, 1x (t. 2) -> 2: (1tt. 1x (t. x) Une specie di parado so di Russel : non di popo no tro vore undelli set-theoretic del second-order A-calculas C: Stende a outouder tipi e valori le quindi comple-blue erutue). e ox dato de tit ALTICE LA DE > ARITIME Quita la purioce identita de acal per inpi. [Ax+1-12](H++)) +3++++ AB; strongly normality ou alforthis official ducte souples suprie Type that in indevitable faciliaente inconstent (Martin Cof 13, Grend)

Poh mortismo pod cativo Oz e of large types; andre polinogs; Due Universi di espressioni di lipo universe di smalltypes: Tipi sase e espressione de > Aterny, Btipa 2 postilo, Alipo Bumverso PAA:B Syntachic Judpaments: Ai tipi o universo 7 = 5; As , 4, 5K; AK Vamo definiti i contesti ben formets: F14, 2:t e ok + : 0s o context Cempty antext niente vanal de y (U) outest 11 context not in I CIT U context (me ovvie mes 100: Uc (Vi type ontext not Iw I T, x is context Tix: A context July Tix:A >x:A MPA:B MX:C context radd var C: T Chiuso TEUs Term constant cousto di coppie base types \$ b:04 meterno Gaore MOT: Va MOZ'U, van ste /teru トマラブ!!! vargale/01 e has/Us hpo/1/2 71:0200:02 10 TIt: 4. 01: 42





comespondeuxe Ancor formules - 25 - Types ofor formula vigpe Curry-to-cord n lambde term romo morphistel prop hormaliset. ~ reduction TH: U1 DM: 0 F. P. proportage dvente 10 (At : U1. M) . 176.6 logice del 2° ordine on quantité nous prova Odi I viorue la prove MO di P&M THIOK! 17 15 01 TOME: WHI on il poli morps mo impredicativo: un so ti propos Madlare, a lose com sponde us quantitatione universele prince o penerale ipi dipendent gurnificatione esstemale Her ashed

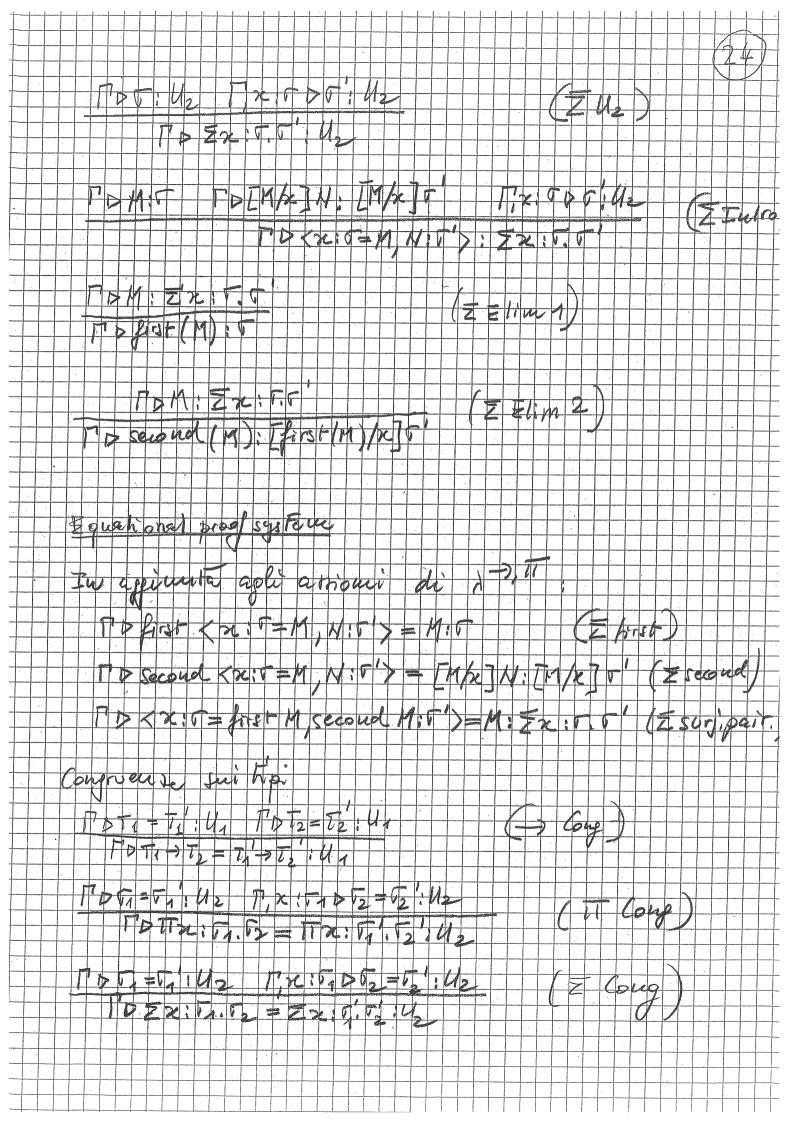
ifatti uel produtto aviet eco generale judici sono hei cioè insienci. I = Dow 100:02 [,x:000:02 Potition 5:02 does = moe à astrae un tipo ande de me vanidate queltres tip de dipendre de me justiro: es, ames [n] une in senerale non verfath is station mente

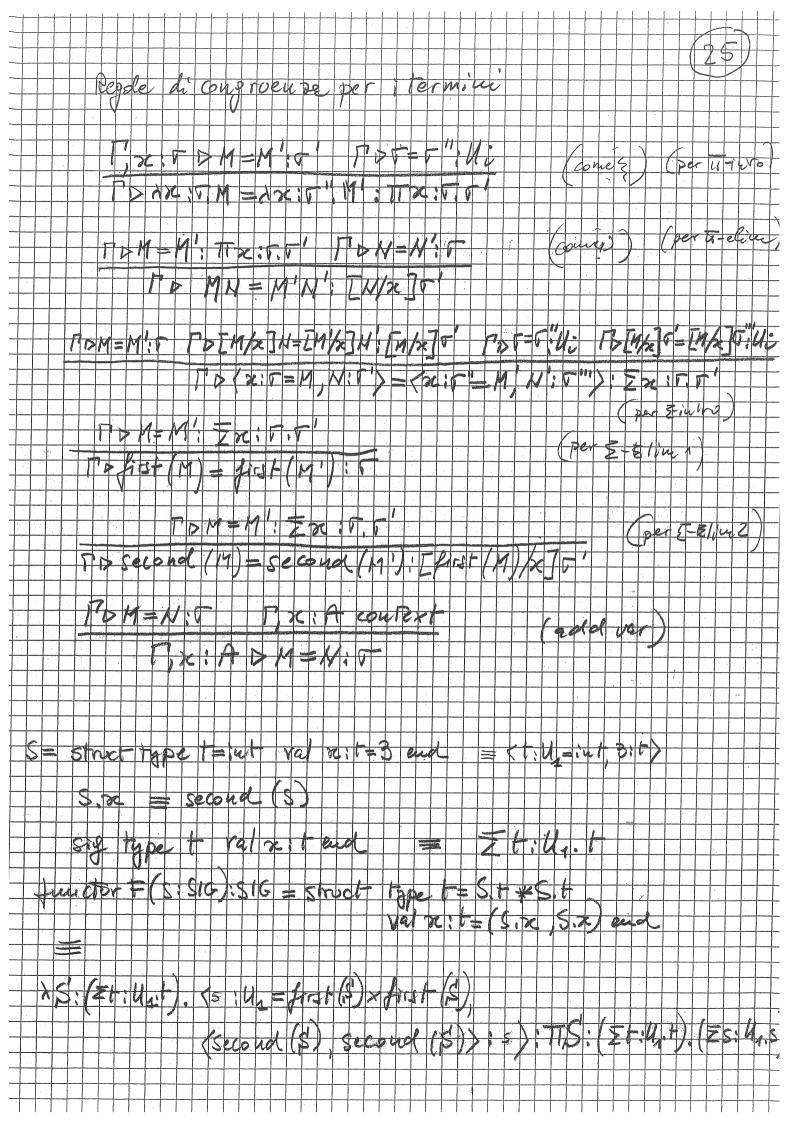
Ipastatie quantificazione esseuzide quidare da Cany Howard B = 1/2 / 2 - A, 5 EB] con Finter To the Miles = KS=CM: SKEPT): The M. H. F. F. F. H. Z. F. DOP that free in MD abstype twith ROISNINDIP realistate with a Fishin 0 = abstage swife y: 45/ 50 ship 10/2/15/470 To abstract with xiris (to Mis) in 0 = IM/x I Tyt So: Swiement & for la soliturous divalore editipo couté upor e ne mento direct id 17 7, 8 pi6 a vault

Un esemplo ditipi astratti abstype twith x, 1, 1, 1, x, ve is MIUN def estype + with y: 12 x 111 x on is 11 in Projug in Projug/22, in 22/ abstype complex with create: real x real > cmp/x Dlus · cuplx x cmp/x -> cuplx re complated rest in comple s real The real x real, (C, P, R, I): real x real - t tis real -aree() OF AM, 8 > (AZ: Crup/2-, re-2) (Create (X19)): real x red > 10 uplementer roce: < C'P'R', I'>=M: [1/3] = (C,P,R;) Treel real/ = Ap: real x real. p P-A/+: resex real, w: real x real) < Proj 2 + Proj w Proj 3 + Proj w Q = a z real x real Proj z I = r z: reel x reel. Proj 2 z 3 con versieure HALLS Fred x red/4 10 real x real small

dei lingue se di prope m me a orce Moduli TPICEMENTE: SML Mac Queen Information der tipi, valor e - 5/10 there Pinterkon a delle stouthure Signatures dame it has a Cost come per AT cile versous on his frageh con the denvasitions unifications , qui à 955ARE wa strollers ad givene our wice Capustars Huctory sous fleresson de sonthure a shothere Spurbure SIG' Signature 516 smulture S = stret type t = lut type typet Val x : 1 = 3 Val k: int ZIF and Que function S \$16): SIG = \$/nje/-Non exists us type (= S. + * S. + Junon higher order (5, 26, 5 2 スパーコ Rud p. 688-691 Esemplo di geome loy programe

(generali) Calcola predictivo cou Somme 干剂, Eunestensone di 29,4 Suran auglocata deto che luca shurire puo appanie una type xprestion M:= U, De 6 M > M Tra: M. M / E z M. M HAIGHAR MIMM (x M = M, M : M) / Ain+/M) second (M) CA VI= M KNIN a puo essere cereto da interior diversa meet dei hai et steure G first e second per mettons a acceptere all due comprient separationed reple AGAUNTIVE MARIO RE Thing tout PotiUs Fix: TOT: We W U3 siput II-astarae dereche con xit TATIOLITICAL, TA: TO THE THE TOM: F Inno BARITMITTALVO IT Eline EDMM: EM/X 16' award a sonre pusande evere 72:51 U.





Acce to li Polimontismo impredicativo & dan astretti espera Dhimorfismo predicento & somme generali 2. con U= 42 & others type: type s well injeure noutermination without 1 e 2. some strongly wormen my explicit recention & appruga type type won lo Epic under este tape chating Anche Treinference completeness dipende