RIEPILOGO

venerdì 17 novembre 2017 09:07

→ TEOREMA DI RICORSIONE

Se $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ è CONTINUA allora:

1) $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)$ è un punto fisso di T

2) Dato $J \in \mathbb{P}_A$ tale che $J = T(J)$ allora $I \subseteq J$ (ossia I è il minimo punto fisso)

→ LEMMA (per dimostrare il Teorema)

Sia $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua. Allora, $\forall i \geq 0$ vale $T^i(\emptyset) \subseteq T^{i+1}(\emptyset)$

L'abbiamo dimostrato usando il PRINCIPIO DI INDUZIONE :

→ Per dimostrare che una proprietà P vale per tutti i valori di $\mathbb{N}$ è sufficiente dimostrare che:

1) P vale per 0 ($P(0)$ vera)

2) Se P vale per n, allora P vale anche per $n+1$ ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$)

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI RICORSIONE

Partiamo dal punto 1)

- T continua $\Rightarrow I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)$ è punto fisso

Dimostrazione

I punto fisso vuol dire $I = T(I)$

(è quello che dobbiamo ottenere)

$$T(I)$$

$=$ { per def. di I }

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)\right)$$

$=$ { per il lemma $T^0(\emptyset) \subseteq T^1(\emptyset) \subseteq T^2(\emptyset) \subseteq \ldots\ldots$

quindi i T^i costituiscono una sequenza non decrescente di insiemi

quindi posso usare la continuità di T }

$$\bigcup_{i \geq 0} T\left(T^i(\emptyset)\right)$$

$=$ { per def. T^i }

$$\bigcup T^{i+1}(\emptyset)$$

$$\bigcup_{i \geq 0}$$

$=$

$$\bigcup_{i \geq 1} T^i(\emptyset)$$

$=$ { poiché $\emptyset \cup A = A$ per qualunque A }

$$\emptyset \cup \bigcup_{i \geq 1} T^i(\emptyset)$$

$=$ { per def. di T^i }

$$T^0(\emptyset) \cup \bigcup_{i \geq 1} T^i(\emptyset)$$

$=$ { def. di $\cup$ }

$$\bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)$$

$=$ { def. di I }

$$I$$

quindi $T(I) = I$

ossia I è punto fisso di T

✓

Dimostriamo ora il punto 2)

- T continua e $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)$

  $\Rightarrow$ se $J = T(J)$ allora $I \subseteq J$

Dimostrazione

dobbiamo mostrare $\underbrace{\bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)}_{I} \subseteq J$

se sapessimo che ognuno dei $T^i(\emptyset)$ e' contenuto in J sarebbe immediato concludere che la loro unione e' contenuta in J

↳ LO DIMOSTRIAMO COME LEMMA SEPARATO

> **Lemma** Sia $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua.
> Sia $J = T(J)$ un punto fisso di T.
> Allora, per ogni $i \geq 0$ $T^i(\emptyset) \subseteq J$

Dimostrazione (per induzione)

CASO BASE $(i = 0)$

$T^0(\emptyset) \subseteq J$

banale! per def. di T^i abbiamo $T^0(\emptyset) = \emptyset$

e $\emptyset$ è contenuto in qualunque insieme

quindi $\emptyset \subseteq J$ ✓

<u>CASO INDUTTIVO</u>

$$\underbrace{T^n(\emptyset) \subseteq J}_{\text{IPOTESI INDUTTIVA}} \Rightarrow \underline{\underline{T^{n+1}(\emptyset) \subseteq J}} \quad ?$$

ASSUMO SIA VERO QUESTO

DEVO DIMOSTRARE CHE VALE QUESTO

$T^{n+1}(\emptyset)$

$=$ { per def. di T^i }

$T(T^n(\emptyset))$

GIÀ DIMOSTRATO

$\subseteq$ { dato che T è <u>CONTINUA</u> è anche <u>MONOTONA</u>

dato che <u>$T^n(\emptyset) \subseteq J$</u> posso usare LA MONOTONIA

di T }

$X \subseteq Y \Rightarrow T(X) \subseteq T(Y)$

$T(J)$

$=$ { J è <u>punto fisso</u> }

J

Quindi $T^{n+1}(\emptyset) \subseteq J$ ✓

→ ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL TEOREMA

(avevamo già visto l'applicazione a $X = \{0\} \cup X$)

Consideriamo questa eq. ricorsiva

$$X = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X\}$$

applichiamo il Teorema per calcolare la soluzione di questa equazione

$$T(X) = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X\}$$

e cerchiamo il minimo PUNTO FISSO

per poter applicare il Teorema dobbiamo assicurarci $\underline{T \text{ CONTINUA}}$

Verifichiamolo:

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \quad \bigcup_{i \geq 0} (T(X_i)) = T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right)$$

$$\bigcup_{i \geq 0} (T(X_i))$$

$= \{$ def. di $T \}$

$$\bigcup_{i \geq 0} \left(\underline{\underline{\{0\} \cup}} \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X_i\}\right)$$

$= \{$ prop. di $\cup \}$

$$\{0\} \cup \bigcup_{i \geq 0} \left(\{ n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X_i \} \right)$$

$= \{ \text{prop. di } \cup \}$

$$\{0\} \cup \{ n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \bigcup_{i \geq 0} X_i \}$$

$= \{ \text{def. di } T \}$

$$T \left(\bigcup_{i \geq 0} X_i \right)$$

quindi T è continua

VISTO CHE T È CONTINUA POSSO CALCOLARE

$$I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)$$ COME MINIMO PUNTO FISSO

$i=0$ $\quad T^0(\emptyset) = \emptyset$

$i=1$ $\quad T^1(\emptyset) = T(\emptyset) = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \emptyset\}$

$= \{0\} \cup \emptyset = \{0\}$

$i=2$ $\quad T^2(\emptyset) = T(T^1(\emptyset)) = T(\{0\}) =$

$= \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \{0\}\}$

$= \{0\} \cup \{2\} = \{0,2\}$

$i=3$ $\quad T^3(\emptyset) = T(T^2(\emptyset)) = T(\{0,2\})$

$= \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \{0,2\}\}$

$= \{0\} \cup \{2,4\} = \{0,2,4\}$

$\vdots$

OGNI VOLTA AGGIUNGO IL SUCCESSIVO NUMERO PARI, QUINDI:

$$I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset) = P$$

INSIEME DI TUTTI I NUMERI PARI

MINIMO PUNTO FISSO DI T E QUINDI

DI T E QUINDI

SOLUZIONE DELL'EQ. RIC.

PER ESERCIZIO:

USARE IL TEOREMA DI RICORSIONE PER TROVARE LE SOLUZIONI DELLE SEGUENTI EQUAZIONI RICORSIVE:

- $X = \{1\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X\}$
- $X = \{1\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n = 2k \wedge k \in X\}$
- $X = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \in X\}$
- $X = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge 1-n \in X\}$

<u>NOTA</u>: ASSICURARSI CHE LE TRASFORMAZIONI SIANO CONTINUE!!!

TEOREMA DI RICORSIONE E FUNZIONI RICORSIVE

venerdì 17 novembre 2017 10:21

→ Abbiamo visto che il Teorema ci consente di dare definizioni ricorsive di <u>INSIEMI</u>

↳ ma per programmare noi siamo interessati a <u>FUNZIONI</u> RICORSIVE

↳ ma una funzione è un insieme.... DI COPPIE!

<u>ESEMPIO</u>
(NON RICORSIVO

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = x+1$

questa funzione corrisponde al seguente insieme di coppie

$$F = \{ \langle x, x+1 \rangle \mid x \in \mathbb{N} \}$$

ossia:

$$F = \{ \langle \underset{x}{0}, \underset{f(x)}{1} \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \dots \}$$

Chiamiamo l'insieme di coppie F <u>GRAFICO</u> della funzione f

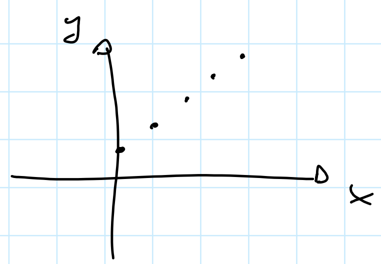

GRAFICO DI UNA FUNZIONE RICORSIVA

$$fact(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ n \cdot fact(n-1) & \text{se } n>0 \end{cases}$$

Come si calcola il grafico?

seguiamo i due casi della definizione

$$F = \underbrace{\{\langle 0,1\rangle\}}_{\substack{\text{CORRISPONDE AL CASO NON RICORSIVO} \\ \text{(CASO BASE) DELLA DEFINIZIONE DI fact}}} \cup \underbrace{\{\langle n, n\cdot \underbrace{K}_{\text{è il risultato di } fact(n-1)} \rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge n>0 \wedge \langle n-1, k\rangle \in F\}}_{\text{CORRISPONDE AL CASO RICORSIVO}}$$

Ho ottenuto un'equazione ricorsiva in cui l'insieme F è definito in termini di se stesso!!

POSSO APPLICARE IL TEOREMA PER CALCOLARE F!

venerdì 17 novembre 2017 10:35

APPLICHIAMO IL TEOREMA

(dovremmo verificare che la trasformazione è continua ma lo sacto)

$$F = \{\langle 0,1\rangle\} \cup \{\langle m, m\cdot k\rangle \mid m\in\mathbb{N} \wedge m>0 \wedge \langle m-1, k\rangle \in F\}$$

quindi

$$T(X) = \{\langle 0,1\rangle\} \cup \{\langle m, m\cdot k\rangle \mid m\in\mathbb{N} \wedge m>0 \wedge \langle m-1, k\rangle \in X\}$$

DOBBIAMO CALCOLARE

$$I = \bigcup_{i\geq 0} T^i(\emptyset)$$

$i=0$ $\quad T^0(\emptyset) = \emptyset$

$i=1$ $\quad T^1(\emptyset) = T(\emptyset) = \{\langle 0,1\rangle\} \cup \{\langle m, m\cdot k\rangle \mid \dots\dots \langle m-1, k\rangle \in \emptyset\}$

$$= \{\langle 0,1\rangle\} \cup \emptyset = \{\langle 0,1\rangle\}$$

$i=2$ $\quad T^2(\emptyset) = T(T^1(\emptyset)) = T(\{\langle 0,1\rangle\}) =$

$$= \{\langle 0,1\rangle\} \cup \{\langle m, m\cdot k\rangle \mid \dots\ \langle m-1, k\rangle \in \{\langle 0,1\rangle\}\}$$

$$= \{\langle 0,1\rangle\} \cup \{\langle 1, 1\cdot 1\rangle\} =$$

$$= \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}$$

$i=3$ $\quad T^3(\emptyset) = T(T^2(\emptyset)) = T(\{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}) =$

$$= \{\langle 0,1\rangle\} \cup \{\langle m, m\cdot k\rangle \mid \dots\ \langle m-1, k\rangle \in \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}\}$$

$= \{\langle 0,1\rangle\} \cup \{\langle 1, 1\cdot 1\rangle, \langle 2, 2\cdot 1\rangle\}$

$= \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$i=4 \quad T^4(\emptyset) = \ldots$

$= \{\langle 0,1\rangle\} \cup \{\langle m, m\cdot k\rangle \mid \ldots \langle m-1, k\rangle \in \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}\}$

$= \{\langle 0,1\rangle\} \cup \{\langle 1, 1\cdot 1\rangle, \langle 2, 2\cdot 1\rangle, \langle 3, 3\cdot 2\rangle\}$

$= \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,6\rangle\}$

0 $\quad fact(0) \quad \ldots\ldots \quad$ 3 $\quad fact(3)$

IL TEOREMA DI RICORSIONE MI CONSENTE DI "ESEGUIRE" LE FUNZIONI RICORSIVE.

INOLTRE MI CONSENTE DI CALCOLARE IL GRAFICO, CHE CONTIENE TUTTI I RISULTATI POSSIBILI DELLA FUNZIONE

NEL CASO DI fact POSSO OSSERVARE CHE IL GRAFICO CONTIENE UNA COPPIA PER OGNI VALORE DI $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ PER OGNI INPUT fact MI DA UN RISULTATO!

$\Rightarrow$ QUINDI fact È UNA FUNZIONE SCRITTA CORRETTAMENTE! MI DARÀ SEMPRE UN RISULTATO (TERMINA PER OGNI $m \in \mathbb{N}$)

A VOLTE LE FUNZIONI RICORSIVE NON

TERMINANO (SE SONO PROGETTATE MALE)

AD ES.

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n=1 \\ 1+f(n+1) & \text{se } n \,!= 1 \end{cases}$$

SE CALCOLIAMO IL GRAFICO OTTENIAMO

$$F = \{ \langle 1, 0 \rangle , \langle 0, 1 \rangle \}$$

$= 1 + f(0+1)$
$= 1 + f(1) =$
$= 1 + 0 = 1$

IL GRAFICO CALCOLATO CON IL TEOREMA DI RICORSIONE VI DICE CHE LA FUNZIONE TERMINA SOLO PER $n=0$ e $n=1$ .... !!

NON È BEN PROGETTATA!