PUNTO DELLA SITUAZIONE

mercoledì 15 novembre 2017 16:08

$$X = T(X)$$ EQ. RICORSIVA

DEFINISCE L'INSIEME X RICORSIVAMENTE COME PUNTO FISSO DI T

$$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$$ TRASFORMAZIONE DI INSIEMI (DATO UN INSIEME A DI TUTTI I POSSIBILI VALORI)

PROBLEMA : IN ALCUNI CASI T PUO' AVERE 0 PUNTI FISSI ....
OPPURE PIU' DI UN PUNTO FISSO....

ARRIVEREMO A DARE UN <u>TEOREMA</u> CHE CI CONSENTE DI VERIFICARE SE T HA PUNTI FISSI E DI SCEGLIERNE UNO "CANONICO" SE NE HA PIU' DI UNO

CONCETTI PRELIMINARI:

- <u>T MONOTONA</u> : $X \subseteq Y \Rightarrow T(X) \subseteq T(Y)$
- <u>T CONTINUA</u> : $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) = \bigcup_{i \geq 0} T(X_i)$$

ES. $T(X) = \{0\} \cup X$

è sia monotona che continua

ALTRO ESEMPIO:

$$T(X) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } X \text{ è finito} \\ \{1\} & \text{se } X \text{ è infinito} \end{cases}$$

$$T(\{1,2,3\}) = \emptyset$$
$$T(\emptyset) = \emptyset$$
$$T(\mathbb{N}) = \{1\}$$
$$T(P) = \{1\} \qquad P = \{0,2,4,6,\dots\}$$

NUMERI PARI

T è monotona?

$$X \subseteq Y \Rightarrow T(X) \subseteq T(Y)$$

SI, verifichiamolo PER CASI:

1) X e Y entrambi finiti

$T(X) = \emptyset$ $\quad T(Y) = \emptyset$ $\quad$ OK poiché $\emptyset \subseteq \emptyset$ ✓

2) X e Y entrambi infiniti (es. $X = P$ e $Y = \mathbb{N}$)

$T(X) = \{1\}$ $\quad T(Y) = \{1\}$ $\quad$ OK poiché $\{1\} \subseteq \{1\}$ ✓

3) X è finito e Y è infinito (es. $X = \{1,2,3\}$, $Y = \mathbb{N}$)

$T(X) = \emptyset$ $\quad T(Y) = \{1\}$ $\quad$ OK poiché $\emptyset \subseteq \{1\}$ ✓

IL CASO X infinito e Y finito non lo considero in quanto è impossibile che questo si verifichi dato che $X \subseteq Y$

OK, T è MONOTONA

T è continua? NO

Lo verifico trovando un controesempio:

scelgo $X_0, X_1, X_2, \ldots$ IN QUESTO MODO:

$$X_i = \{0, \ldots, i\}$$

quindi

$$X_0 = \{0\} \quad X_1 = \{0,1\} \quad X_2 = \{0,1,2\} \quad \ldots\ldots$$

SONO INFINITI INSIEMI FINITI, OGNUNO CONTENUTO NEL SUCCESSIVO

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) \qquad \bigcup_{i \geq 0}\left(T(X_i)\right)$$

$= \{$PER DEFINIZIONE DI $X_i\}$ $\qquad = \{$PER DEF. DI $T\}$

$$T(\mathbb{N}) \qquad \bigcup_{i \geq 0}(\emptyset)$$

$= \{$PER DEF. DI $T\}$ $\qquad = \{$PER DEF. DI $\bigcup\}$

$$\{1\} \qquad \emptyset$$

LA TRASFORMAZIONE NON É
CONTINUA PERCHÉ HO TROVATO
UN CONTROESEMPIO IN CUI NON
VALE (HO DUE RISULTATI DIVERSI)

Proprietà $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$

Se T è continua, allora è anche monotona

(ossia T continua $\Rightarrow$ T monotona)

Dimostrazione

Assumiamo T continua, dobbiamo dimostrare

$$X \subseteq Y \Rightarrow T(X) \subseteq T(Y) \qquad \text{monotonia}$$

X e Y sono una sequenza (finita) di insiemi non decrescente. Quindi, per la continuità di T abbiamo

$$T(X \cup Y) = T(X) \cup T(Y)$$

Dobbiamo dimostrare $T(X) \subseteq T(Y)$

$$T(Y)$$

$= \{$ poiché $X \subseteq Y$ e vale la proprietà di $\cup$ $\}$

$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

$$T(X \cup Y)$$

$T(X \cup Y)$

$= \{$per continuità di $T\}$

$T(X) \cup T(Y)$

QUINDI HO DIMOSTRATO $T(Y) = T(X) \cup T(Y)$

PER LA STESSA PROPRIETÀ DEGLI INSIEMI CHE HO USATO PRIMA DEDUCO CHE

$T(X) \subseteq T(Y)$

QUINDI T È MONOTONA!!

TEOREMA DI RICORSIONE

Sia $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ una Trasformazione di insiemi <u>CONTINUA</u>. Allora valgono le seguenti due proprietà:

1) $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)$ è un punto fisso di T

2) Dato $J \in \mathbb{P}_A$ tale che $J = T(J)$ (ossia J è punto fisso) allora $I \subseteq J$

Che cosa significa $T^i(\emptyset)$?

T^i descrive l'applicazione (ricorsiva) di T ripetuta i volte

es.

$T^0(\emptyset) = \emptyset \qquad i=0$

$T^1(\emptyset) = T(\emptyset) \qquad i=1$

$T^2(\emptyset) = T(T(\emptyset)) \qquad i=2$

$T^3(\emptyset) = T(T(T(\emptyset))) \qquad i=3$

$\vdots$

ossia

$$T^i(\emptyset) = \begin{cases} \emptyset & i=0 \\ T(T^{i-1}(\emptyset)) & i>0 \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N}$$

Che cosa dice il Teorema?

→ posso ottenere un punto fisso calcolando

$$I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)$$

→ I è il <u>minimo punto fisso</u> di T. Qualunque altro punto fisso J è più grande di I (lo contiene)

A questo punto possiamo usare il Teorema per trovare LA soluzione di un'equazione ricorsiva.

ESEMPIO

$$X = \{0\} \cup X$$

EQ. RICORSIVA CON $T(X) = \{0\} \cup X$

CHE ABBIAMO GIÀ VISTO AVERE INFINITI PUNTI FISSI (TUTTI GLI INSIEMI CHE CONTENGONO 0)

T È CONTINUA QUINDI POSSIAMO APPLICARE IL TEOREMA PER TROVARE IL PUNTO FISSO DA USARE COME SOLUZIONE CANONICA

Dobbiamo calcolare $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)$

$$T^0(\emptyset) = \emptyset$$

DEF. DI T

$$T^1(\emptyset) = \underline{T}(\emptyset) = \{0\} \cup \emptyset = \{0\}$$

$$T^2(\emptyset) = T(T(\emptyset)) = T(\{0\}) =$$

$$= \{0\} \cup \{0\} = \{0\}$$

$$T^3(\emptyset) = T(T^2(\emptyset)) = T(\{0\}) =$$

$$= \{0\} \cup \{0\} = \{0\}$$

$\vdots$

$i > 0 \qquad T^i(\emptyset) = \{0\}$

$$I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset) = T^0(\emptyset) \cup T^1(\emptyset) \cup T^2(\emptyset) \cup \ldots\ldots$$

$$= \emptyset \cup \{0\} \cup \{0\} \cup \ldots\ldots$$

$$= \{0\}$$

SECONDO IL TEOREMA QUESTO È IL <u>MINIMO</u> PUNTO FISSO DI T

TUTTI GLI ALTRI PUNTI FISSI J INCLUDONO I

Dimostriamo il Teorema di ricorsione.

Per prima cosa consideriamo il seguente lemma

Lemma Sia $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua.
Allora, per ogni $i \geq 0$ vale
$$T^i(\emptyset) \subseteq T^{i+1}(\emptyset)$$

Ossia, se T è continua, continuando ad applicare ricorsivamente T ottengo insiemi sempre più grossi (o uguali).

Per dimostrare il lemma usiamo il

PRINCIPIO DI INDUZIONE

→ è un metodo per dimostrare che una certa proprietà P è vera per TUTTI gli elementi di un insieme infinito (ad es. $\mathbb{N}$)
(nel nostro caso per tutti gli $i \in \mathbb{N}$)

→ Data una proprietà $P(x)$ sui numeri naturali;
Se:
1) $P(0)$ è vero (la proprietà è vera per 0)

2) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ è vero

allora $P(n)$ vale per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

(dalla verità di P per n possiamo dedurne che P vale anche per n+1)

ESEMPIO BANALE. DIMOSTRIAMO CHE

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ n \geq 0$$

quindi $P(x) = x \geq 0$

1) CASO BASE $x = 0$

$0 \geq 0$? sì ✓ $P(0)$ È VERA

2) CASO INDUTTIVO $x = n$

$$P(n) \overset{?}{\Rightarrow} P(n+1)$$

$P(n)$ mi dice che $n \geq 0$

$n+1 > n$

quindi

$n+1 > 0$

QUINDI VALE ANCHE $P(n+1)$

PER IL PRINCIPIO DI INDUZIONE HO CHE LA PROPRIETÀ VALE SU TUTTI I NATURALI

Dimostrazione del lemma (per induzione)

CASO BASE ($i = 0$)

$$T^0(\emptyset) \subseteq T^1(\emptyset) \quad ?$$

$$T^0(\emptyset)$$

$= \{$ per def. di $T^i \}$

$$\emptyset$$

$\subseteq \{$ poiché $\emptyset$ è sottoinsieme di qualunque altro insieme $\}$

$$T^1(\emptyset)$$

LA PROPRIETÀ VALE PER $i=0$ POICHÉ HO MOSTRATO CHE $T^0(\emptyset) \subseteq T^1(\emptyset)$

CASO INDUTTIVO

IPOTESI INDUTTIVA $\left[\; T^m(\emptyset) \subseteq T^{m+1}(\emptyset) \;\right]$ PROPRIETÀ PER m

$$\Rightarrow$$

$T^{m+1}(\emptyset) \subseteq T^{m+2}(\emptyset)$] PROPRIETÀ PER $m+1$

?

$$T^{m+1}(\emptyset)$$

$=$ {per def. T^i}

$$T(\underbrace{T^n(\emptyset)}_{A})$$

$\subseteq$ {PER IPOTESI INDUTTIVA SO CHE $T^n(\emptyset) \subseteq T^{n+1}(\emptyset)$

INOLTRE SO CHE T È CONTINUA, QUINDI MONOTONA}

$$T(\underbrace{T^{n+1}(\emptyset)}_{B})$$

$A \subseteq B \Rightarrow T(A) \subseteq T(B)$

$=$ {per def. di T^i}

$$T^{n+2}(\emptyset)$$

QUINDI $T^{n+1}(\emptyset) \subseteq T^{n+2}(\emptyset)$

CHE È PROPRIO QUELLO CHE VOLEVO DIMOSTRARE

QUINDI IL LEMMA VALE PER TUTTI GLI i

✓