RICORSIONE

martedì 14 novembre 2017 11:08

- Tutti i programmi che abbiamo scritto fino ad ora risolvono i problemi eseguendo dei ciclo (APPROCCIO ITERATIVO)
- un altro approccio consiste nel risolvere i problemi riducendosi a problemi più semplici (APPROCCIO RICORSIVO)

<u>ESEMPIO</u> CALCOLO DEL FATTORIALE <u>$n!$</u>

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

```
int fact (int n) {
    int ris = 1;
    for (int i=1; i<=n; i++)
        ris *= i;
    return ris;
}
```

⇐ SOLUZIONE ITERATIVA

RAGIONANDO :

$$n! = n \cdot \underbrace{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}_{= (n-1)!}$$

QUESTO MI DÀ L'IDEA PER DEFINIRE UNA FUNZIONE CHE CALCOLA IL FATTORIALE DI n RICHIAMANDOSI PER CALCOLARE IL FATTORIALE DI $n-1$

NOTA $0! = 1$

IN TERMINI MATEMATICI:

$$fact(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ n \cdot fact(n-1) & \text{se } n>0 \end{cases}$$

QUINDI :

$$fact(3) = 3 \cdot fact(2) = 3 \cdot (2 \cdot fact(1)) =$$

$$= 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot fact(0))) = 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) = \underline{6}$$

IN C :

```
int factR (int n) {
    if (n==0) return 1;
    else return n*factR(n-1);
```

SOLUZIONE RICORSIVA

```
    else return n*factR(n-1);
}
```

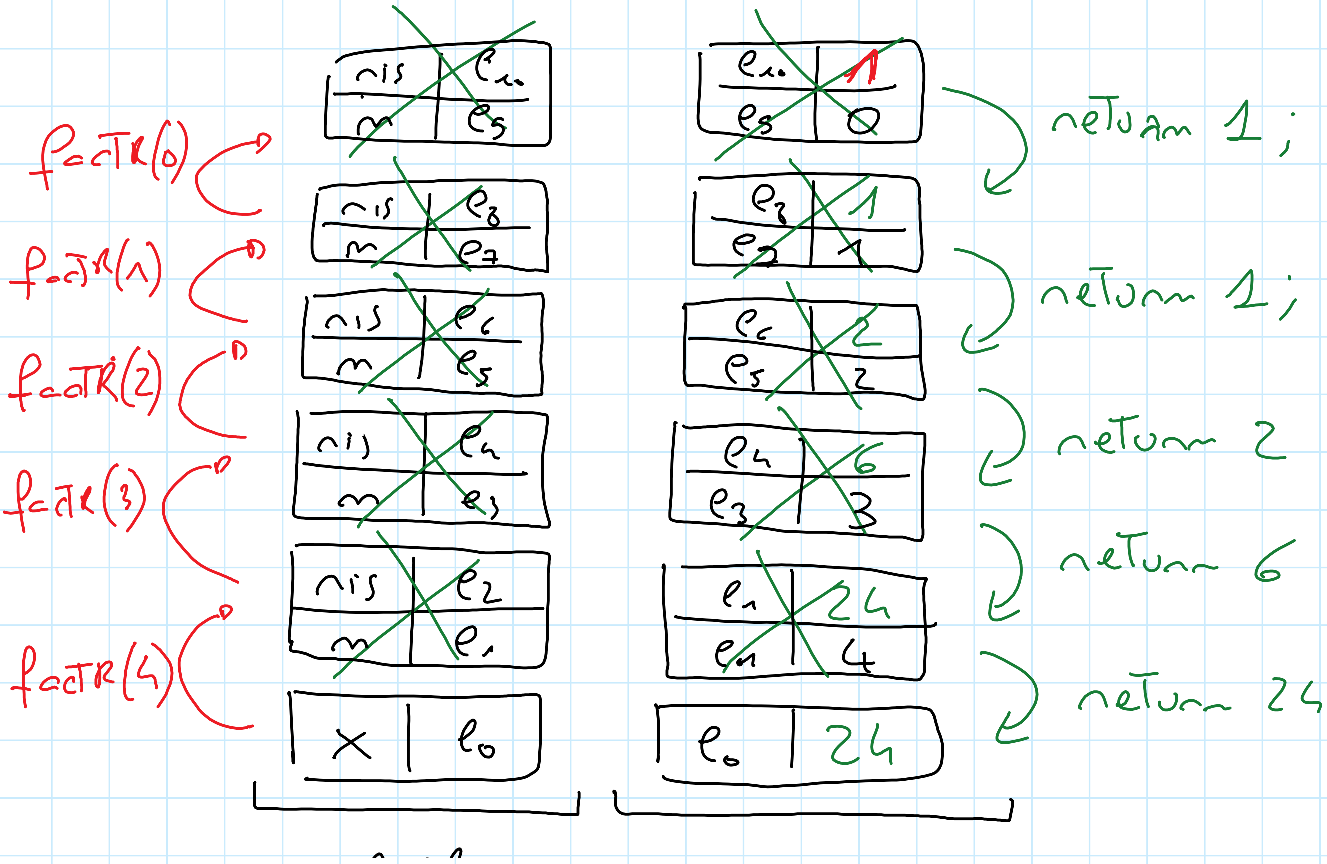
MOLTO PIÙ COMPATTA
DELLA SOLUZIONE ITERATIVA

VEDIAMO CHE COSA SUCCEDE NELLO STATO

(PICCOLA VARIANTE)

```
int factR(int n) {
    int ris;
    if (n==0) ris= 1;
    else ris= n* factR(n-1);
    return ris;
}

main() { ... x=fact(4); ... }
```



AMD MEM

ESEMPIO SULLE LISTE

Calcolo della lunghezza di una lista:

```
int length(ListaDiElementi l) {
    int cont = 0;
    while (l != NULL) {
        cont++;
        l = l -> next;
    }
    return cont;
}
```

SOLUZIONE ITERATIVA

```
int lengthR(ListaDiElementi l){
    if (l == NULL)
        return 0;
    else
        return 1 + lengthR(l->next);
}
```

SOLUZIONE RICORSIVA

LA RICORSIONE RICHIEDE UN PO' DI ATTENZIONE

ES: COSA SUCCEDE SE CHIAMO

factR(-5);

NON TERMINA:

PERCHÉ CHIAMA factR(-6)... factR(-7).....

QUANDO PROGETTO UNA FUNZIONE RICORSIVA DEVO ASSICURARMI CHE PER QUALUNQUE n LE CHIAMATE RAGGIUNGANO IL "CASO BASE" $n=0$

NON BANALE

PER QUESTO STUDIAMO "TEORIA DELLA RICORSIONE"

TEORIA DELLA RICORSIONE

martedì 14 novembre 2017 11:49

→ VEDERE **DISPENSA** SULLA PAGINA WEB DEL CORSO

→ CONCETTO PRELIMINARE: PUNTO FISSO DI UNA FUNZIONE

Data una funzione $f: A \to A$ si dice **punto fisso** di f un valore $x \in A$ tale che

$$x = f(x)$$

AD ESEMPIO, CON $A = \mathbb{N}$

→ $f(x) = 2x - 4$ abbiamo che $x = 4$ è un punto fisso $4 = f(4)$

→ $f(x) = x + 1$ f non ha punti fissi!!

→ $f(x) = x + 6 - 4 - 2$ f ha infiniti punti fissi (tutti i valori di $\mathbb{N}$)

Per studiare la TEORIA DELLA RICORSIONE ci concentreremo su un particolare tipo di funzione:

le TRASFORMAZIONI DI INSIEMI

Sono funzioni che prendono un insieme di valori e restituiscono un insieme di valori

- ESEMPIO: trasformazione T che raddoppia il valore degli elementi di un insieme

$T(\{1,2,3\}) = \{2,4,6\}$

$T(\{5\}) = \{10\}$

$T(\emptyset) = \emptyset$

$T(\mathbb{N}) = \{0,2,4,6,\dots\}$ insieme dei numeri pari

QUESTA TRASFORMAZIONE E' DEFINITA COSì:

$$T(X) = \{ n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n = 2k \wedge k \in X \}$$

QUINDI:

Dato un insieme A di TUTTI i valori

Dato un insieme A di tutti i valori possibili, una __Trasformazione__ è una funzione

$$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$$

dove $\mathbb{P}_A$ è l'insieme delle parti di A.

insieme delle parti = insieme di tutti i possibili sottoinsiemi

USIAMO LA NOZIONE DI PUNTO FISSO APPLICATA ALLE TRASFORMAZIONI D'INSIEMI PER DEFINIRE INSIEMI RICORSIVAMENTE

$$X = T(X)$$

EQUAZIONE RICORSIVA

CHE DEFINISCE L'INSIEME X

X È DEFINITO RICORSIVAMENTE (IN TERMINI DI SE STESSO)

UNA SOLUZIONE DI QUESTA EQUAZIONE È UN PUNTO FISSO DI T

ESEMPI :

$$\to \quad X = \underbrace{X \cup \{0\}}$$

$$T(X) = X \cup \{0\}$$

$$T(\{1,2,3\}) = \{0,1,2,3\}$$

$$T(\emptyset) = \{0\}$$

$$T(\{0,2,4,6,\dots\}) = \{0,2,4,6,\dots\}$$

L'INSIEME DEI NUMERI PARI E' UN PUNTO FISSO DI QUESTA TRASFORMAZIONE E QUINDI E' UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

$X = X \cup \{0\}$

E' L'UNICO PUNTO FISSO? NO

TUTTI GLI INFINITI INSIEMI CHE CONTENGONO 0 SONO PUNTI FISSI DI T E QUINDI SOLUZIONI $\to$ INFINITE SOLUZIONI

→ $X = \mathbb{N} \setminus X$

COMPLEMENTO RISPETTO A $\mathbb{N}$

$\setminus$ = SOTTRAZIONE DI INSIEME

QUINDI

$$T(X) = \mathbb{N} \setminus X$$

$$T(\{1,2,3\}) = \{0, 4, 5, 6, \dots\}$$

$$T(\emptyset) = \mathbb{N}$$

$$T(\mathbb{N}) = \emptyset$$

QUESTA TRASFORMAZIONE NON AMMETTE PUNTI FISSI QUINDI L'EQ. RICORSIVA NON HA SOLUZIONI !

$\rightarrow X = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X\}$

$$T(X) = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X\}$$

$$T(\{1,2,3\}) = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \{1,2,3\}\}$$
$$= \{0\} \cup \{3,4,5\} = \{0,3,4,5\}$$

$$T(\emptyset) = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \emptyset\}$$
$$= \{0\} \cup \emptyset = \{0\}$$

$$T(\{0\}) = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \{0\}\}$$
$$= \{0\} \cup \{2\} = \{0,2\}$$

$$T(\{0,2\}) = \dots \{0,2,4\}$$
$$T(\{0,2,4\}) = \dots \{0,2,4,6\}$$
$$\vdots$$
$$T(P) = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in P\}$$
$$= \underline{\underline{P}}$$

INSIEME DEI NUMERI PARI

L'INSIEME DEI NUMERI PARI È PUNTO FISSO DI T E QUINDI SOLUZIONE DELL'EQ. RICORSIVA

ABBIAMO DETTO CHE UN'EQ. RICORSIVA PUÒ AVERE NESSUNA, ALCUNE O INFINITE SOLUZIONI

Vedremo il TEOREMA DI RICORSIONE:

- → ci dirà se esiste un punto fisso di una data trasformazione T
- → quando ci sono più punti fissi ci darà un modo per sceglierne uno (LA SOLUZIONE <u>CANONICA</u> DELL'EQ. RICORSIVA)

<u>PRELIMINARI</u>

<u>Definizione</u>: $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ si dice MONOTONA se, dati $X, Y \in \mathbb{P}_A$ con $X \subseteq Y$ allora $T(X) \subseteq T(Y)$

ESEMPIO: $T(X) = X \cup \{0\}$ È MONOTONA? SI

$$\{1,2\} \subseteq \{1,2,3,4\}$$

$$T(\{1,2\}) = \{0,1,2\}$$
$$\subseteq$$
$$T(\{1,2,3,4\}) = \{0,1,2,3,4\}$$

Verifichiamolo in generale:

siano $X_1, X_2 \subseteq \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ con $X_1 \subseteq X_2$

$$T(X_1) = X_1 \cup \{0\} \qquad T(X_2) = X_2 \cup \{0\}$$

$$X_1 \cup \{0\} \subseteq X_2 \cup \{0\}$$

poiché $X_1 \subseteq X_2$

ALTRO ESEMPIO

$$T(X) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \#X > 2 \\ \{1\} & \text{se } \#X \leq 2 \end{cases}$$

$\#X$ ← CARDINALITÀ (NUMERO DI ELEMENTI)

$T(\{1,2,3\}) = \emptyset$ poiché $\#\{1,2,3\} = 3 > 2$

$T(\{2\}) = \{1\}$ poiché $\#\{2\} = 1 \leq 2$

T è monotona? NO

Lo verifico con un controesempio

$X_1 = \{8\}$ $\quad X_2 = \{8,7,2\}$ $\quad X_1 \subseteq X_2$

$T(X_1) = \{1\}$ $\quad T(X_2) = \emptyset$

$$\underbrace{T(X_1)}_{=\{1\}} \not\subseteq \underbrace{T(X_2)}_{=\emptyset}$$

QUINDI NON È MONOTONA

Definizione $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ si dice CONTINUA se, data una qualunque sequenza NON DECRESCENTE (rispetto a $\subseteq$) di insiemi (finita o infinita)

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \qquad X_i \in \mathbb{P}_A$$

abbiamo

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i) = T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right)$$

ossia

$$T(X_0) \cup T(X_1) \cup T(X_2) \cup \dots$$

$$=$$

$$T(X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \dots)$$

Se gli insiemi sono ordinati in modo non decrescente fare l'unione e applicare T al risultato corrisponde ad applicare T ad ognuno di essi e prendere l'unione dei risultati.

SE QUESTO VALE ALLORA T È CONTINUA

ESEMPIO:

$T = X \cup \{0\}$ È CONTINUA?

$X_0 = \{4\}$ $X_1 = \{4, 5\}$ $X_2 = \{4, 5, 6\}$

$X_0\ X_1\ X_2$ SONO UNA SEQ. DI INSIEMI NON DECRESCENTE (FINITA)

$T(X_0) = \{0, 4\}$ $T(X_1) = \{0, 4, 5\}$ $T(X_2) = \{0, 4, 5, 6\}$

$\bigcup T(X_i) = \{0, 4, 5, 6\}$

$T(\bigcup X_i) = T(\{4, 5, 6\}) = \{0, 4, 5, 6\}$ =

Verifichiamolo in generale:

sia $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \ldots\ldots$

dobbiamo verificare

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) = \bigcup_{i \geq 0} T(X_i)$$

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right)$$

= per def. di T

$\{0\} \cup \bigcup X_i$

$$\bigcup_{i \geq 0} X_i$$

= proprietà dell'unione

$$\bigcup_{i \geq 0} \left(X_i \cup \{0\} \right)$$

= per def. di T

$$\bigcup_{i \geq 0} \left(T(X_i) \right)$$

QUINDI OK, È CONTINUA