

ESERCIZI TIPICI SU LINGUAGGI FORMALI

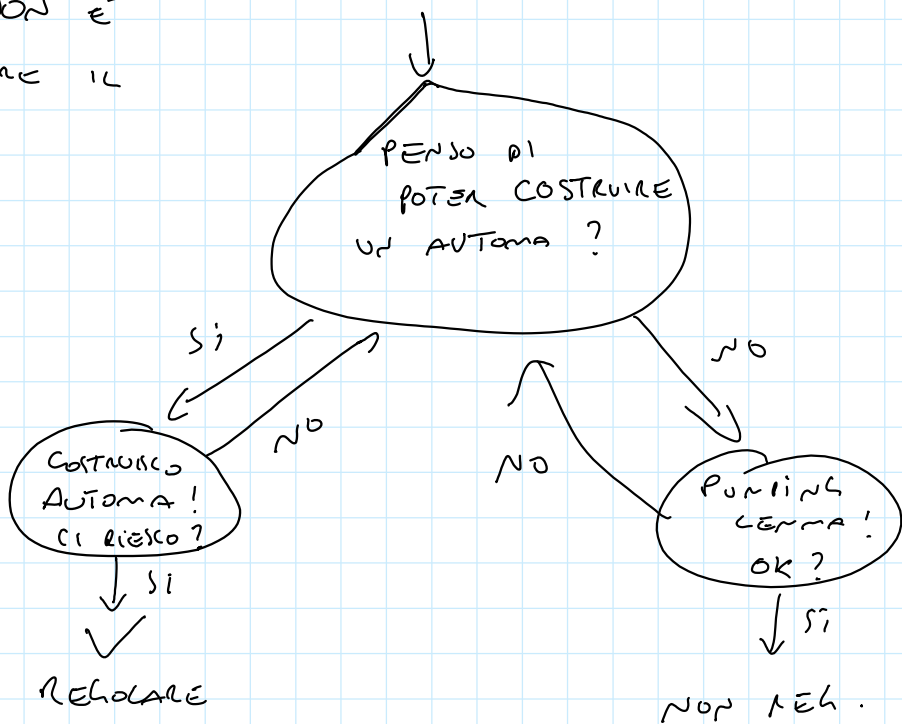
- DATO UN LINGUAGGIO L DIMOSTRARE SE È REGOLARE O MENO E FURNIRE UNA GRAMMATICA O UN AUTOMA CHE LO DEFINISCA NO
- DATA UNA GRAMMATICA G DEFINIRE IL LINGUAGGIO L GENERATO E DIMOSTRARE SE È REGOLARE O MENO
- ...

COME SI PROCEDE PER VERIFICARE SE UN LINGUAGGIO È REGOLARE O MEGLIO?

→ PER DIMOSTRARE CHE È REGOLARE BASTA DARE UN ADF CHE LO ACCETTA (OPPURE UNA GRAMMATICA REGOLARE)

$$L = \{ a^m b^m \mid m > m > 0 \}$$

→ PER DIMOSTRARE CHE NON È REGOLARE BISOGNA USARE IL PUMPING LEMMA

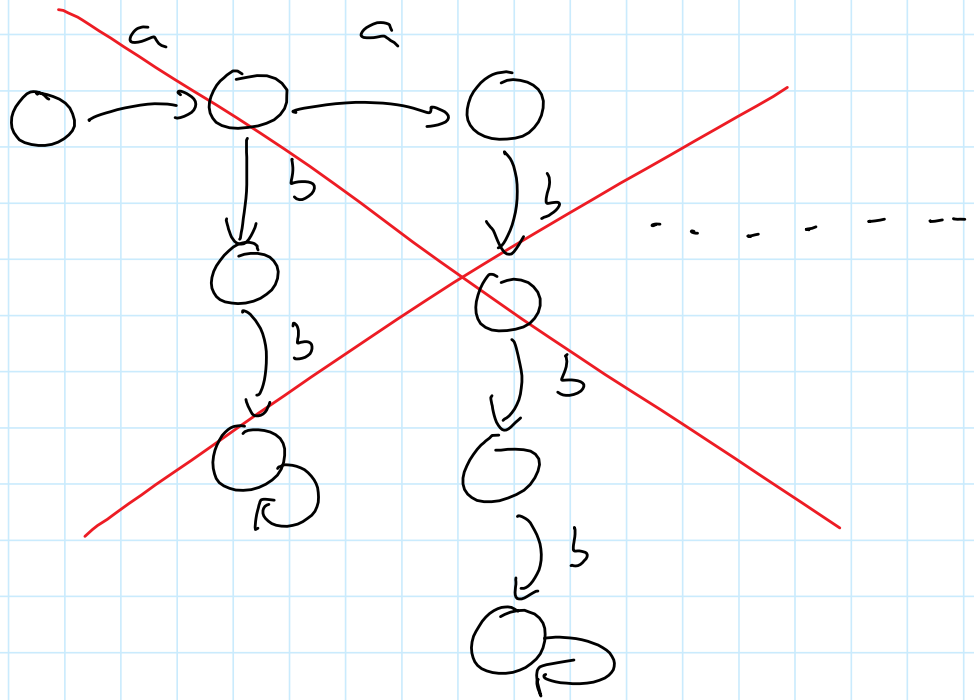


$$L = \{ a^m b^m \mid m > 0 \}$$

$abb \in L$

$aaabbbb \in L$

$abbbbbb \in L$



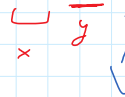
USIAMO IL PUMPING LEMMA

$$L = \{a^k b^m \mid m > k > 0\}$$

$$\forall m \in \mathbb{N} . \exists w \in L . |w| \geq m . \left(\forall xyz . w = xyz . |xy| \leq m \wedge y \neq \epsilon \Rightarrow (\exists i \in \mathbb{N} . x y^i z \notin L) \right)$$

m generico

$$aaabbbbb \in L$$



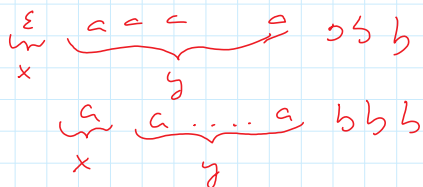
DEVO
SCEGLIERE
UN MODO
CHE y
SIA SICURAMENTE
FATTO DI a
UN MODO CHE
REPLICANDO y
OTTENGO PIU'
DE CHE b

SCELGO UNA STRINGA $w \in L$
ALMENO m a

scelgo

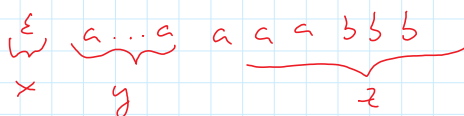
$$w = a^m b^{m+1} \in L \quad |w| \geq m \quad \checkmark$$

$$\overbrace{aaa \dots a}^m \overbrace{bbb \dots bb}^{m+1}$$



$$\vdots$$

$$\overbrace{a \dots a}^t a \overbrace{bbb}$$



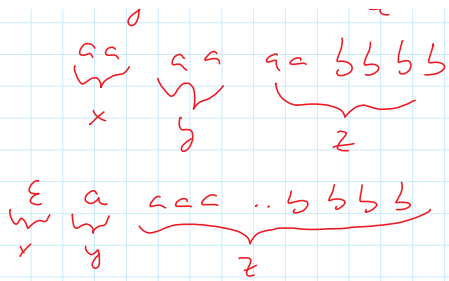
$$\overbrace{aa}^x \overbrace{aa}^y \overbrace{aa}^z \overbrace{bbb}$$

$$|xy| \leq m \quad y \neq \epsilon$$

$$x = a^t \quad t \geq 0 \quad t < m$$

$$y = a^s \quad s > 0 \quad s \leq m$$

$$\Rightarrow a^{t+s} a^{m+1-t-s}$$



$$z = a^q b^{m+1} \quad q \geq 0 \quad q < m$$

tal. che
 $t+s+q = m$

$$i=0 \quad xy^0z = xz = \underbrace{a^t}_x \underbrace{a^q b^{m+1}}_z$$

$t+q < m$
 poiché
 $t+s+q = m$
 e $s > 0$

NEL CASO
 $x = \varepsilon$
 $y = a^m \Rightarrow bb \dots b \notin L$

QUINDI
 $xz \in L \dots$
 MADRACCIA ...

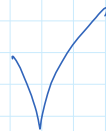
$i=1$ OVVVIAMENTE $\in L$

$$i=2 \quad xy^2z = xyyz = \underbrace{a^t}_x \underbrace{a^s}_y \underbrace{a^s}_y \underbrace{a^q b^{m+1}}_z$$

$t+s+s+q > m$
 poiché
 $t+s+q = m$
 e $s > 0$

quindi
 IL NUMERO DELLE a
 \geq AL NUMERO
 DELLE b !!
 (CHE SONO $m+1$)

$$xy^2z \notin L$$



IL LINGUAGGIO NON È
 REGOLARE !!

DIAMO ANCHE UNA GRAMMATICA

$$L = \{ a^m b^m \mid m > 0 \}$$

abb

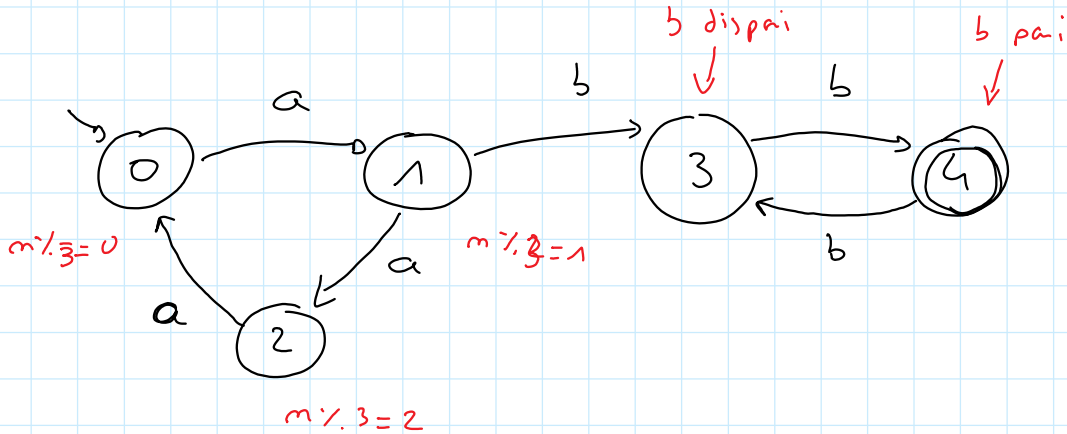
aaabbbbbb
↑ ↑ ↑ ↑

abbbbb

$$S \rightarrow abb \mid aSb \mid Sb$$

Esercizio 2 - IV Appello 2017 (11 punti)

$$L = \{ a^m b^{2m} \mid m > 0 \wedge m \% 3 = 1 \wedge m > 0 \}$$



$$abb \in L \quad 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{b} 4 \quad \checkmark$$

$$aaaa bbb b \in L \quad 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{a} 1$$

$$\checkmark \quad 4 \xleftarrow{b} 3 \xleftarrow{b} 4 \xleftarrow{b} 3 \quad \downarrow b$$

IL LINGUAGGIO È REGOLARE!!

DARE UNA GRAMMATICA CHE LO GENERA

1° modo: TRADUCCI L'AUTOMA IN GRAMMATICA REGolare

$$0 \rightarrow a1$$

$$3 \rightarrow b4 \mid b$$

$$1 \rightarrow a2 \mid b3$$

$$4 \rightarrow b3$$

$$2 \rightarrow a0$$

2° modo : DIRETTAMENTE DALLA DEF. DEL LINGUAGGIO

$$S \rightarrow abb \mid aaaS \mid Sbb$$

$$S \rightarrow aaaS \rightarrow aaaabb$$

$$S \rightarrow Sbb \rightarrow abbbs$$

$$S \rightarrow abb$$

ALTRA GRAMMATICA :

$$S \rightarrow AB$$

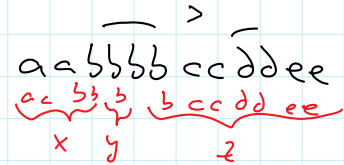
$$A \rightarrow a \mid aaaA$$

$$B \rightarrow bb \mid bbB$$

ESERCIZIO 2, II APPELLO 2017 (9/2/17)

$$L = \{ aa(bb)^k cc(dd)^m ee \mid k > m > 0 \}$$

PUMPING LEMMA



$$w = aa(bb)^{m+1}cc(dd)^m ee$$

$$|xy| \leq m$$

4 CASI

- 1) $x = \epsilon$ $y = a^z b^t$ $z = b^{(2m+2-t)}$ $w = aabbbbbbccdddeee$
- 2) $x = a$ $y = a b^{t'}$ $z = b^{(2m+2-t')}$ $w = aabbbbbbccdddeee$
- 3) $x = aa$ $y = b^{t''}$ $z = b^{(2m+2-t'')}$ $w = aabbbbbbccdddeee$
- 4) $x = aab^s$ $y = b^{t'''}$ $z = \dots$

CASI 1 e 2) $i=0$ $xy^i z = xz$ \nwarrow OTTIENGO UNA STRINGA CON 0 o 1 a $\Rightarrow \notin L$

CASO 3) $i=0$ $xz = aab^{(2m+2-t'')}ccdd^m ee$

$$2m+2-t'' < 2m+2$$

$$\downarrow$$

$$> 0$$

\Uparrow
 QUINDI LE b NON SONO ALMENO 2 PIU' DELL' d

(LE b SONO AL MASSIMO

$2m+1$ e le δ
sono $2m$)

CI DEVE ESSERE UNA COPPIA
DI b IN PIU' RISPETTO ALLE
 δ . INVECE LE b SONO AL
MASSIMO UNA IN PIU' RISPETTO
ALLE δ ($2m+1$ CONTRO $2m$)

CASO 4) ANALOGO

$xz \notin L$

NON È REGOLARE

ESERCIZI PER CASA

Per ognuno dei seguenti linguaggi su $\Sigma = \{a, b\}$ verificare se è regolare o meno. Per TUTTI i

linguaggi AD ECCEZIONE DEL NUMERO 6

definire una grammatica che lo definisce.

$$1) L = \{ b a^k b^k \mid k > 0 \}$$

$$2) L = \{ a^k b^k \mid k \leq m \}$$
 per un $m > 0$ fissato
(ad esempio $m = 5$)

$$3) L = \{ a^k b^m \mid k, m \geq z \}$$
 per uno $z > 0$ fissato
(ad esempio $z = 5$)

$$4) L = \{ a^k b^m \mid k \neq m \}$$

$$5) L = \{ a^k b^m \mid (k \cdot 2) \neq (m \cdot 2) \wedge k, m \geq 0 \}$$

$$6) L = \{ a^k \mid k \text{ è un numero primo} \}$$

ALTRI ESERCIZI PER CASA

Definire il linguaggio generato dalle seguenti grammatiche sull'alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ con categoria sintattica iniziale S . Per ogni linguaggio dire se è regolare o meno.

$$1) \quad \begin{aligned} S &\rightarrow aX \\ X &\rightarrow bS \mid b \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} S &\rightarrow aS \mid bB \\ B &\rightarrow bbB \mid ccC \\ C &\rightarrow ccC \mid cc \end{aligned}$$

$$3) \quad \begin{aligned} S &\rightarrow ASB \mid c \\ A &\rightarrow ab \mid abA \\ B &\rightarrow ba \mid baB \end{aligned}$$

$$4) \quad \begin{aligned} S &\rightarrow aSc \mid B \\ B &\rightarrow aBb \mid ab \end{aligned}$$

$$5) \quad \begin{aligned} S &\rightarrow aABb \mid ab \\ A &\rightarrow aC \mid a \\ B &\rightarrow cb \mid b \\ C &\rightarrow c \end{aligned}$$

$$6) \quad \begin{aligned} S &\rightarrow aS \mid bS \mid aAB \\ B &\rightarrow bbC \\ C &\rightarrow aC \mid bC \mid a \mid b \end{aligned}$$