PUMPING LEMMA

Se L è un linguaggio REGOLARE allora $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che per TUTTE le stringhe w di L con $|w| \geq n$ vale che

$\exists\, xyz$ $w = xyz$ tale che

1) $|xy| \leq n$
2) $y \neq \varepsilon$
3) $xy^iz \in L$ $i \geq 0$

$$L = \{ a^k b^m \mid k, m > 0 \}$$

$m = 3$

$w = \underbrace{a}_{x}\underbrace{a}_{y}\underbrace{b}_{z} \in L \qquad |w| \geq 3$

1) $|xy| = |aa| = 2 \leq 3$ ✓

2) $y = a \neq \varepsilon$ ✓

3) $xy^iz \in L$

$i = 0 \qquad xy^iz = xz = ab \in L$

$i = 1 \qquad xy^iz = xyz = aab \in L$

$i = 2 \qquad xy^iz = xyyz = aaab \in L$

$i = 3 \qquad xy^iz = xyyyz = aaaab \in L$ ✓

$\vdots$

venerdì 20 ottobre 2017 09:20

CONSIDERIAMO UN'ALTRA STRINGA PER LO STESSO LINGUAGGIO

$w = aaabb \qquad |w| \geq 3 \quad \checkmark$

QUALI SONO I POSSIBILI x, y, z CHE POTREI SCEGLIERE?

RICORDO $|xy| \leq 3 \qquad y \neq \varepsilon$

PROVIAMO QUESTA

$\overbrace{aa\,a}^{xy}bb$

$\underbrace{aa}_{x}\underbrace{a}_{y}\underbrace{bb}_{z}$

$\underbrace{a}_{x}\underbrace{aa}_{y}\underbrace{bb}_{z}$

PROVIAMO QUESTA

$\underbrace{\varepsilon}_{x}\underbrace{aaa}_{y}\underbrace{bb}_{z}$

$\underbrace{a}_{x}\underbrace{a}_{y}\underbrace{abb}_{z}$

$\underbrace{\varepsilon}_{x}\underbrace{aa}_{y}\underbrace{abb}_{z}$

$\underbrace{\varepsilon}_{x}\underbrace{a}_{y}\underbrace{aabb}_{z}$

IL PUMPING LEMMA MI ASSICURA CHE UNA DI QUESTE SUDDIVISIONI GARANTISCE

$xy^iz \in L \quad \forall i \geq 0$

3) xy^iz

$i=0 \quad xz = bb \notin L$

QUELLA CHE HO SCELTO E' LA SUDDIVISIONE SBAGLIATA...

3) xy^iz

$i=0 \quad xz = aabb \in L$

$i=1 \quad xyz = aaabb \in L$

$i=2 \quad xyyz = aa\underline{a}\,\underline{a}bb \in L$

$\vdots$

QUESTA È UNA DELLE SUDDIVISIONI CHE SODDISFANO IL PUMPING LEMMA

PERCHÉ IL PUMPING LEMMA FUNZIONA? (DIMOSTRAZIONE)

- DATO CHE IL LINGUAGGIO È REGOLARE ESISTE UN AUTOMA CHE LO ACCETTA
- L'AUTOMA HA UN INSIEME FINITO DI STATI, PER POTER ACCETTARE UNA STRINGA DI LUNGHEZZA MAGGIORE DEL NUMERO DEI SUOI STATI L'AUTOMA DEVE PER FORZA ESEGUIRE UN CICLO
- MA SE C'È UN CICLO, ALLORA PUÒ ESSERE PERCORSO UN NUMERO ARBITRARIO DI VOLTE (ANCHE 0)
- ESISTONO INFINITE ESECUZIONI DIVERSE DELL'AUTOMA, IN OGNUNA DELLE QUALI PERCORRO UN NUMERO DI VOLTE DIVERSO IL CICLO RAGGIUNGENDO SEMPRE LO STATO FINALE
- POSSO RAPPRESENTARE COME

$$w = xyz$$

x: CATTURA LA PORZIONE DELLA STRINGA ACCETTATA DALLE TRANSIZIONI CHE PRECEDONO IL CICLO

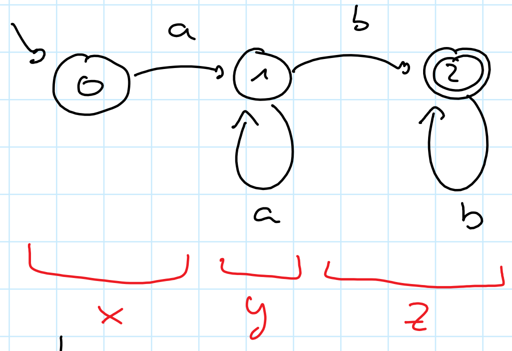
y: CATTURA LA PORZIONE DELLA STRINGA ACCETTATA PERCORRENDO IL CICLO

z: CATTURA LA PORZIONE DI STRINGA CHE VA DAL CICLO ALLO STATO FINALE

POTENDO ESEGUIRE IL CICLO QUANTE VOLTE MI PARE POSSO RIPETERE LA y QUANTE VOLTE MI PARE

→ n lo posso scegliere come il numero degli stati dell'automa

$$L = \{a^k b^m \mid k, m > 0\}$$



aaaab

$$0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 2$$

FARE PIÙ PASSI DI QUANTI SIANO GLI STATI RICHIEDE DI PASSARE PIÙ VOLTE DALLO STESSO STATO

"PRINCIPIO DELLE BUCHE E DEI PICCIONI"

n buche
$n+1$ piccioni

$\Rightarrow$ una buca contiene 2 piccioni

IL PUMPING LEMMA LO POSSO USARE PER CAPIRE SE UN LINGUAGGIO È REGOLARE O NON REGOLARE....

↳ PIÙ PRECISAMENTE, IL PUMPING LEMMA POSSO USARE PER DIMOSTRARE CHE UN LINGUAGGIO NON È REGOLARE

PUMPING LEMMA

Se L È REGOLARE $\Longrightarrow$ $\underbrace{\exists m \in \mathbb{N} \ldots\ldots}_{P}$

Dato un L generico mi chiedo se è regolare o meno.

Potrei andare a vedere se L soddisfa P.

In realtà il fatto che L soddisfi P non mi dice niente sulla regolarità di L.

I linguaggi regolari soddisfano P, ma esistono anche linguaggi non regolari che la soddisfano...

RAGIONIAMO SU UN ESEMPIO PIU' SEMPLICE

$n \in \mathbb{N}$ FINISCE CON 0 $\Longrightarrow$ n e' PARI

Se scopro che un numero n e' pari
posso dire qualcosa sul fatto che
finisca con 0 ? NO

Posso vedere se e' dispari !! in questo
caso sicuramente non finirebbe per 0

$$A \Rightarrow B$$

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

SE SONO INTERESSATO A SCARTARE A POSSO PROVARE A VEDERE SE VALE $\neg B$

Quindi posso usare il pumping lemma per dimostrare che un linguaggio <u>NON È REGOLARE</u>

Se L è regolare $\Rightarrow$ $\underbrace{\exists n \in \mathbb{N} \, . \, \dots}_{P}$

$\neg P \Rightarrow L$ non è REGOLARE !!

VEDIAMO LA DEFINIZIONE CONTROPOSITIVA DEL (ROVESCIATA) PUMPING LEMMA

venerdì 20 ottobre 2017 10:14

(VEDIAMO PUMPING LEMMA COME FORMULA)

L REGOLARE $\Rightarrow$

$$\exists m \in \mathbb{N}.\ \forall w \in L.\ |w| \geq m \Rightarrow \exists xyz.\ w = xyz \wedge |xy| \leq m \wedge y \neq \varepsilon \wedge (\forall i \geq 0.\ xy^i z \in L)$$

DOBBIAMO NEGARE QUESTA

$$\neg(\exists m \in \mathbb{N}.\ \forall w \in L.\ |w| \geq m \Rightarrow \exists xyz.\ w = xyz \wedge |xy| \leq m \wedge y \neq \varepsilon \wedge (\forall i \geq 0.\ xy^i z \in L))$$

$$\equiv \quad (\neg \exists x.P \equiv \forall x.\neg P)$$

$$\forall m \in \mathbb{N}.\ \neg(\forall w \in L.\ \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''})$$

$$\equiv$$

$$\forall m \in \mathbb{N}.\ \exists w \in L.\ \neg(|w| \geq m \Rightarrow \cdots\cdots)$$

$$\equiv \quad (A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B)$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg(\neg A \vee B) \equiv A \wedge \neg B$$

$$\forall m \in \mathbb{N}.\ \exists w \in L.\ |w| \geq m \wedge \neg(\exists xyz.\ w = xyz \wedge |xy| \leq m \wedge y \neq \varepsilon \wedge (\forall i \geq 0.\ xy^i z \in L))$$

PER OGNI m

ESISTE UNA STRINGA DEL LINGUAGGIO LUNGA ALMENO m

CHE NON PUÒ ESSERE SUDDIVISA IN $x\ y\ z$

SODDISFANDO LE TRE PROPRIETÀ DEL PUMPING LEMMA

FACCIAMO ANCORA QUALCHE PASSO

$$\forall m \in \mathbb{N}. \exists w \in L. \left(|w| \geq m \wedge \neg \left(\exists xyz. w = xyz \wedge |xy| \leq m \wedge y \neq \varepsilon \wedge (\forall i \geq 0. xy^iz \in L\right)\right)$$

$$\equiv$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}. \exists w \in L. \left(|w| \geq m \wedge \left(\forall xyz. \left(w = xyz \wedge |xy| \leq m \wedge y \neq \varepsilon \Rightarrow \left(\exists i \geq 0. xy^iz \notin L\right)\right)\right)\right)}$$

COMUNQUE IO SUDDIVIDA w

SE $|xy| \leq m$ E $y \neq \varepsilon$

ALLORA RIMUOVENDO y ($i=0$) OPPURE REPLICANDO y PIÙ VOLTE ($i>1$) TROVO UNA STRINGA CHE NON APPARTIENE AL LINGUAGGIO

$L = \{a^k b^k \mid k > 0\}$ dimostriamo che non è regolare

$\forall m \in \mathbb{N}. (\dots)$ assumiamo che m sia un numero arbitrario

$\exists w \in L. (|w| \geq m \wedge (\dots))$ scegliere una stringa lunga almeno m

scegliamo $w = a^m b^m$

È LA STRINGA FATTA DA m a ED m b, QUALUNQUE SIA m

$|a^m b^m| = 2m \geq m$

MIA SCELTA

(potevo scegliere $a^{2m} b^{2m}$
$a^{m/2} b^{m/2}$)

SONO TUTTE LUNGHE ALMENO m MA NON È DETTO CHE SIANO "BUONE" PER DIMOSTRARE

DEVO ~~FAR~~ VEDERE ORA CHE TUTTI I MODI DI SUDDIVIDERE w IN xyz MI PORTANO IN UNA SITUAZIONE IN CUI MODIFICANDO IL NUMERO DI COPIE DI y OTTENGO UNA STRINGA CHE NON APPARTIENE AL LINGUAGGIO

$w = a^m b^m$

considero Tutti i modi di suddividere $w = xyz$

$$|xy| \le m \qquad y \ne \varepsilon$$

$$\overbrace{aaa\ldots a}^{m}\overbrace{bbb\ldots b}^{m}$$

$$\underbrace{aaa\ldots}_{x}\underbrace{a}_{y}\underbrace{bbb\ldots b}_{z}$$

$$\underbrace{a}_{x}\underbrace{aaaa}_{y}\underbrace{abbb\ldots b}_{z}$$

$$\underbrace{\varepsilon}_{x}\underbrace{aaa}_{y}\underbrace{aaabbb\ldots b}_{z}$$

PER COME HO SCELTO W E DATO CHE $|xy| \le m$ HO CHE X E Y SARANNO FATTI SOLO DI a

Qualunque suddivisione è tale che

$x = a^h$ con $h \ge 0$ $h < m$ ALMENO UNA a SE LA PRENDE y

$y = a^t$ con $t > 0$ $t \le m$

$y \ne \varepsilon$

$z = a^k b^m$

LE a RIMASTE

TUTTE LE B

$$h + t + k = m$$

$$w = xyz = \overbrace{a^h}^{x}\ \overbrace{a^t}^{y}\ \overbrace{a^k b^m}^{z}$$

vediamo cosa succede quando xy^iz

$i = 0 \quad xz = a^h a^k b^m \notin L$ poiché $t > 0$ quindi $h+k < m$

$\exists i$ che mi da una stringa che non $\in L$

quindi la proprietà negata è soddisfatta

quindi il linguaggio non è regolare!!