21 - Alberi e Ricorsione

Programmazione e analisi di dati
Modulo A: Programmazione in Java

Paolo Milazzo

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa
http://pages.di.unipi.it/milazzo
milazzo@di.unipi.it

Corso di Laurea Magistrale in Informatica Umanistica
A.A. 2016/2017

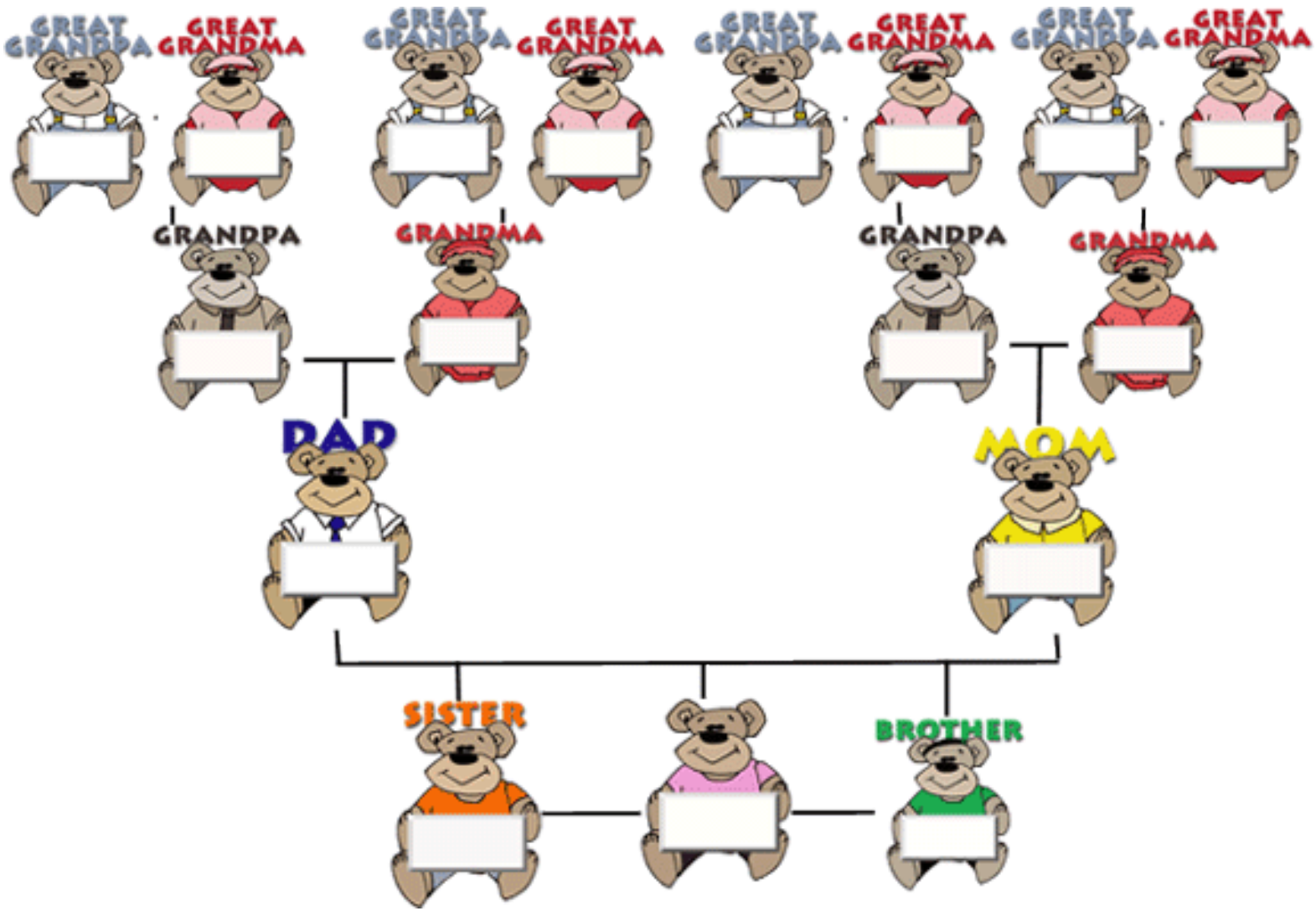
Altre strutture dati...

In certe situazioni gli array, i vettori e le altre strutture dati fornite dalla Libreria di Java non sono semplici da usare...

Esempio: albero genealogico

- Supponiamo di voler scrivere un programma che gestisce un albero genealogico
- Abbiamo un individuo, di cui dobbiamo indicare i genitori, i nonni, i bisnonni, ecc...
- Possiamo assumere di rappresentare l'individuo tramite un oggetto
- Il metodo `setGenitori` consente di specificare i genitori dell'individuo
- I genitori saranno a loro volta individui... di cui si potranno specificare i genitori, ecc...

Albero genealogico (1)



Albero genealogico (2)

Come deve essere fatta la classe `Individuo`?

- Deve prevedere una stringa per il nome dell'individuo
- Deve prevedere riferimenti ai due individui genitori
  - ossia, due variabili di tipo `Indiviuo`

Quindi: la classe `Individuo` conterrà riferimenti a oggetti della stessa classe!

Albero genealogico (3)

```
public class Individuo {

  // nome dell'individuo
  private String nome;

  // riferimento al padre (di tipo Individuo)
  private Individuo padre;

  // riferimento alla madre (di tipo Individuo)
  private Individuo madre;

  // costruttore: inizializza solo il nome
  public Individuo(String nome) {
    // padre e madre inizializzati di default a null
    this.nome = nome;
  }

(segue)
```

Albero genealogico (4)

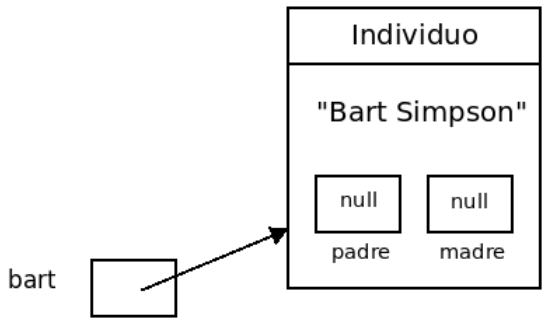
```
(segue Individuo)

  // restituisce il nome
  public String getNome() { return nome; }

  // restituisce l'individuo padre
  public Individuo getPadre() { return padre; }

  // imposta il padre (se non ancora impostato)
  public void setPadre(Individuo padre) {
    if (this.padre == null) this.padre = padre;
  }

  // restituisce l'individuo madre
  public Individuo getMadre() { return madre; }

  // imposta la madre (se non ancora impostata)
  public void setMadre(Individuo madre) {
    if (this.madre==null) this.madre = madre;
  }

}
```

Albero genealogico (5)

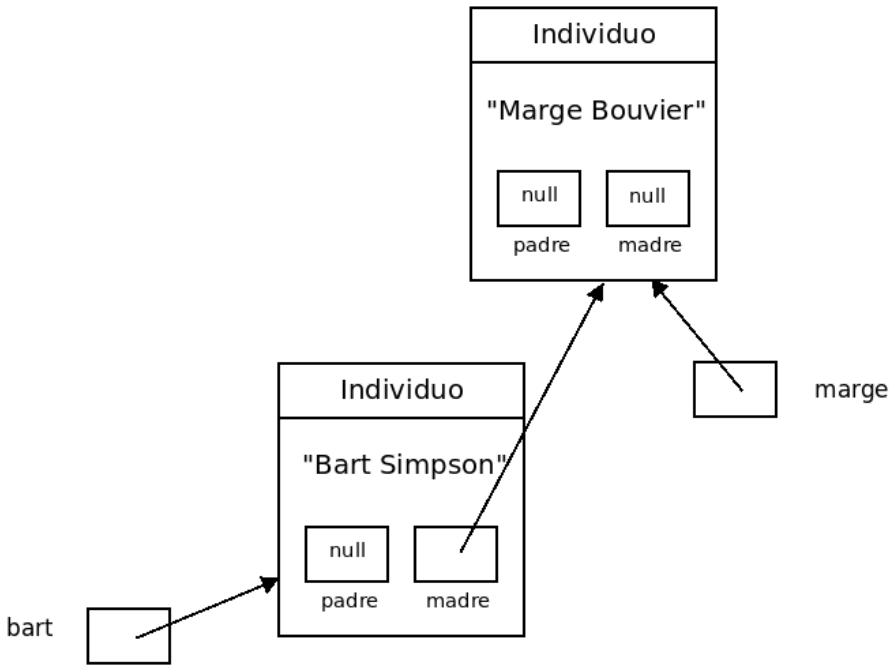
Come si usa? Vediamo un main...

```
public class UsaAlberoGenealogico {

  public static void main(String[] args) {

    Individuo bart = new Individuo("Bart Simpson");

    Individuo marge = new Individuo("Marge Bouvier");
    bart.setMadre(marge);

    Individuo homer = new Individuo("Homer Simpson");
    bart.setPadre(homer);

    Individuo nonno1 = new Individuo("Abraham Simpson");
    homer.setPadre(nonno1); // nota: metodo invocato su homer!

    Individuo nonna1 = new Individuo("Mona Simpson");
    homer.setMadre(nonna1); // nota: metodo invocato su homer!

    Individuo nonno2 = new Individuo("Clancy Bouvier");
    marge.setPadre(nonno2); // nota: metodo invocato su marge!

    Individuo nonna2 = new Individuo("Jacqueline Bouvier");
    marge.setMadre(nonna2); // nota: metodo invocato su marge!
  }

}
```

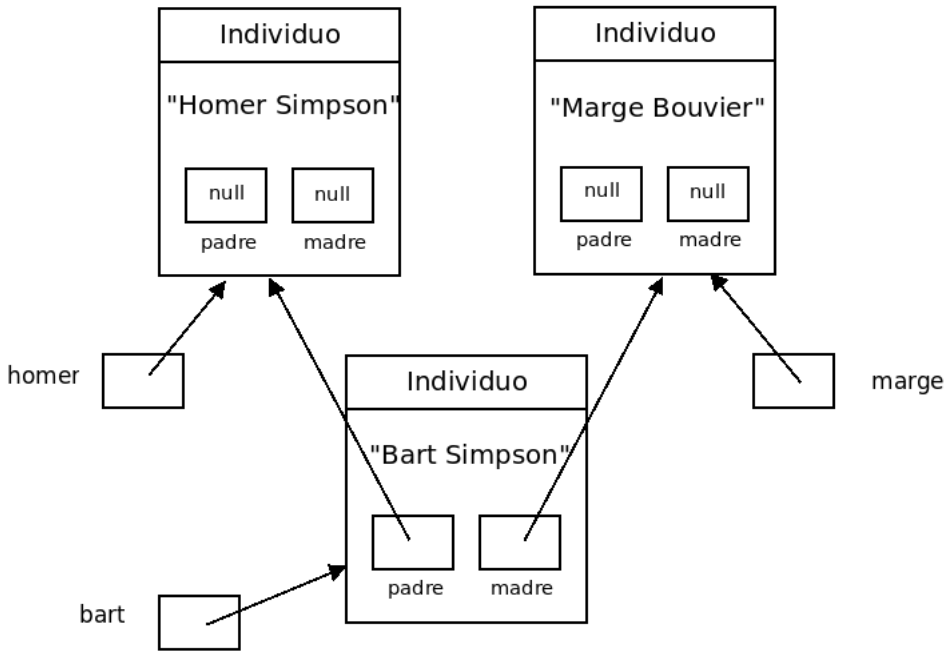
Albero genealogico (6a)



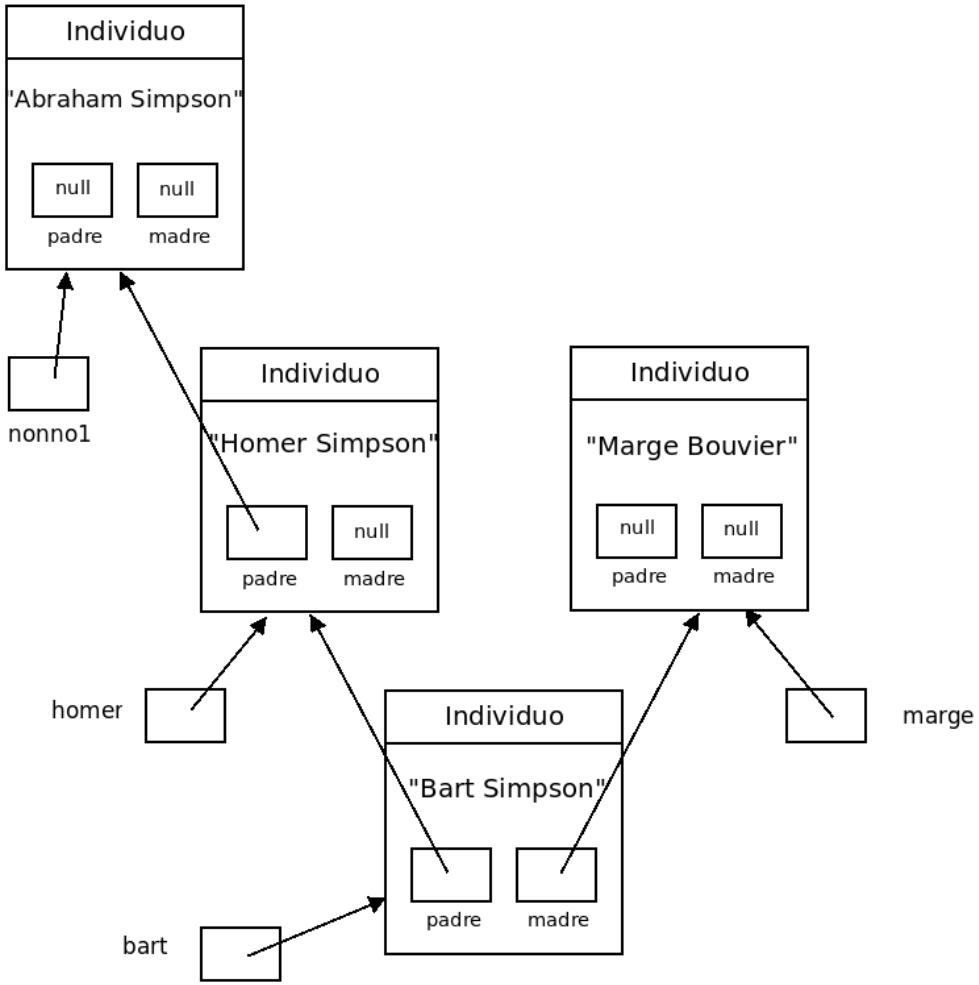
Albero genealogico (6b)



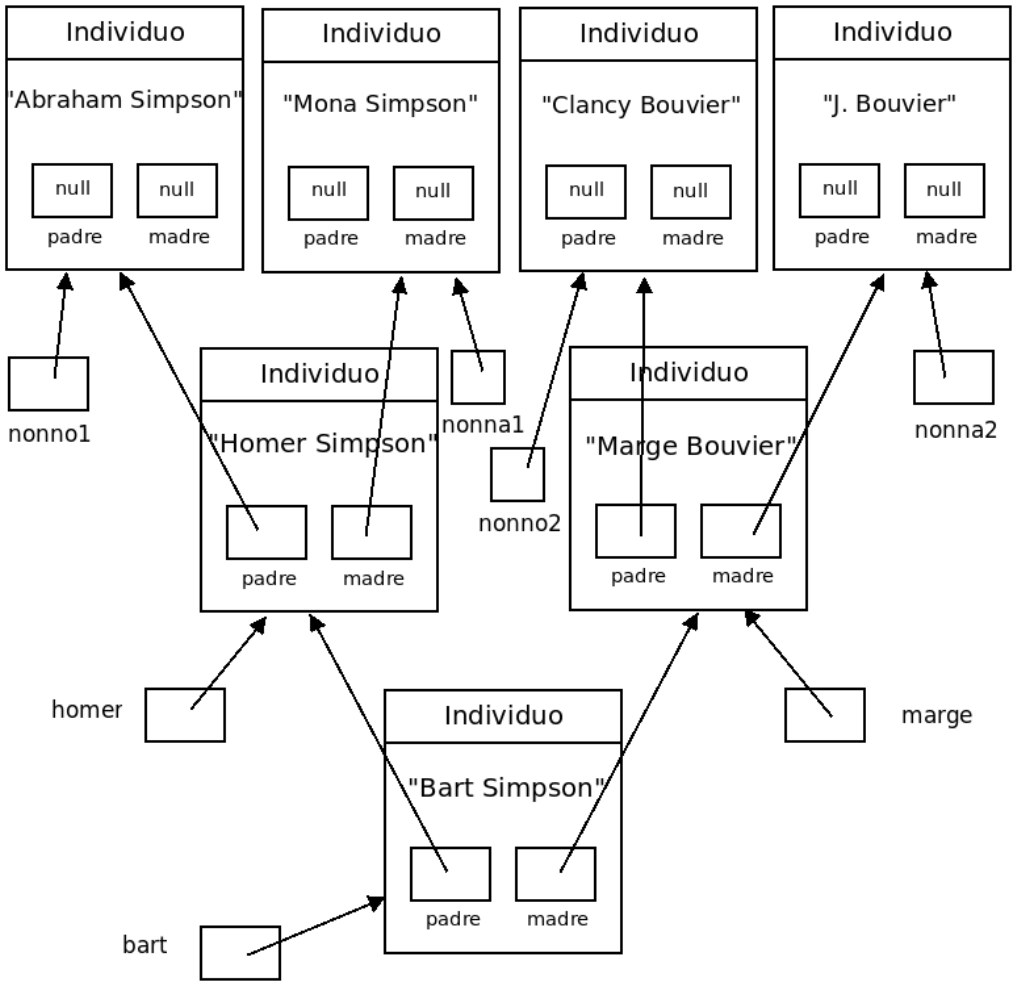
Albero genealogico (6c)



Albero genealogico (6d)



Albero genealogico (6e)



Albero genealogico (7)

E se volessimo stampare l'albero genealogico (tramite un nuovo metodo `stampaAlberoGenealogico()`)?

Ad esempio, cercando di ottenere questo risultato:

```
Bart Simpson
--Homer Simpson
----Abraham Simpson
----Mona Simpson
--Marge Simpson
----Clancy Bouvier
----Jacqueline Bouvier
```

Albero genealogico (8)

Per poter stampare l'albero genealogico di un individuo, il metodo `stampaAlberoGenealogico()` dovrebbe:

- stampare il nome dell'individuo su cui è chiamato
- stampare l'albero genealogico del padre
- stampare l'albero genealogico della madre

Ma....

- anche il padre e la madre sono individui...
- la funzionalità di stampa dell'albero genealogico di un individuo la stiamo definendo ora...
- questo è un cane che si morde la coda...

Albero genealogico (9)

Tutto sotto controllo!

Il metodo `stampaAlberoGenealogico()` che stiamo definendo è ricorsivo

- al suo interno richiama se stesso!

```
//nuovo metodo della classe Individuo

public void stampaAlberoGenealogico() {
  System.out.println(nome);
  if (padre!=null) padre.stampaAlberoGenealogico();
  if (madre!=null) madre.stampaAlberoGenealogico();
}
```

```
//utilizzo del metodo (aggiunto in fondo al main)

bart.stampaAlberoGenealogico();
```

Albero genealogico (10)

Attenzione: il controllo `padre!=null` (analogo per `madre`) serve per due motivi:

- se il padre (o la madre) è `null` non abbiamo niente da stampare per quanto lo riguarda
- se la variabile `padre` è `null`, il comando `padre.stampaAlberoGenealogico()` da un errore a tempo di esecuzione
  - eccezione `NullPointerException`

Albero genealogico (11)

Risultato:

```
Bart Simpson
Homer Simpson
Abraham Simpson
Mona Simpson
Marge Bouvier
Clancy Bouvier
Jacqueline Bouvier
```

Mancano i trattini prima dei nomi degli avi!

Albero genealogico (11)

Proviamo a modificare il metodo...

```
//nuovo metodo della classe Individuo

public void stampaAlberoGenealogico() {
  System.out.println(nome);
  if (padre!=null) {
    System.out.print("--");
    padre.stampaAlberoGenealogico();
  }
  if (madre!=null) {
    System.out.print("--");
    madre.stampaAlberoGenealogico();
  }
}
```

Albero genealogico (12)

Risultato:

```
Bart Simpson
--Homer Simpson
--Abraham Simpson
--Mona Simpson
--Marge Bouvier
--Clancy Bouvier
--Jacqueline Bouvier
```

Non ci siamo ancora...

- Il numero di trattini che devono essere stampati in ogni riga dipende da "quanto vecchio" è l'individuo
- ossia, da quanto è lontano dall'individuo radice dell'albero (`bart`)

Soluzione: aggiungere un contatore da passare da un individuo ai suoi genitori incrementandolo ogni volta

Albero genealogico (13)

Nuovo tentativo...

- Ora il metodo ricorsivo prevede anche un parametro intero (il contatore)

```
//nuovo metodo della classe Individuo

public void stampaAlberoGenealogico(int contatore) {
  // stampa tanti trattini quanti indicati da contatore
  for (int i=0; i<contatore; i++)
    System.out.println("--");
  System.out.println(nome);

  // chiamate ricorsive con contatore aumentato
  if (padre!=null) padre.stampaAlberoGenealogico(contatore+1);
  if (madre!=null) madre.stampaAlberoGenealogico(contatore+1);
}
```

Modifichiamo anche la chiamata nel main

```
// all'inizio il contatore e' 0 (non servono trattini per bart)
bart.stampaAlberoGenealogico(0);
```

Albero genealogico (14)

Risultato:

```
Bart Simpson
--Homer Simpson
----Abraham Simpson
----Mona Simpson
--Marge Bouvier
----Clancy Bouvier
----Jacqueline Bouvier
```

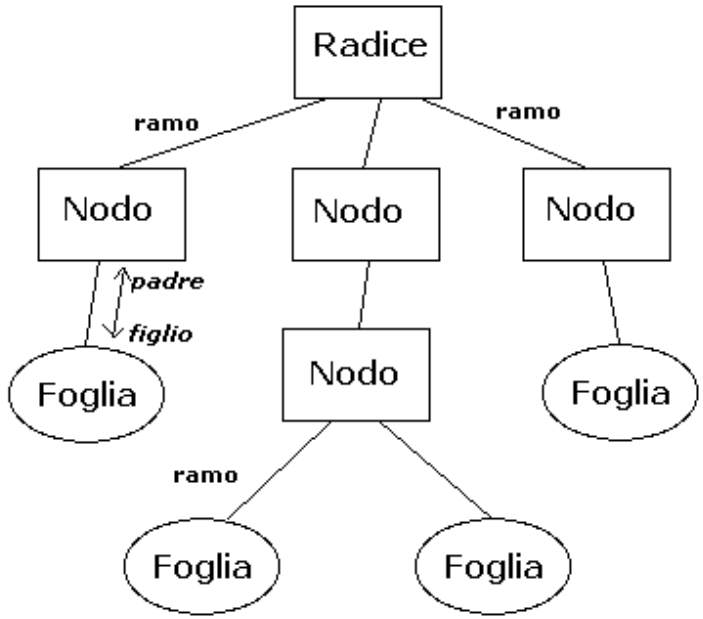
Ci siamo!

La struttura dati Albero (1)

La struttura dati che abbiamo usato per realizzare l'albero genealogico prende il nome di Albero

Un albero:

- E' costituito da nodi (in Java sono oggetti) tra i quali esiste una relazione padre-figlio
- Ha un nodo radice (senza padri)
- Ha nodi foglia (senza figli)

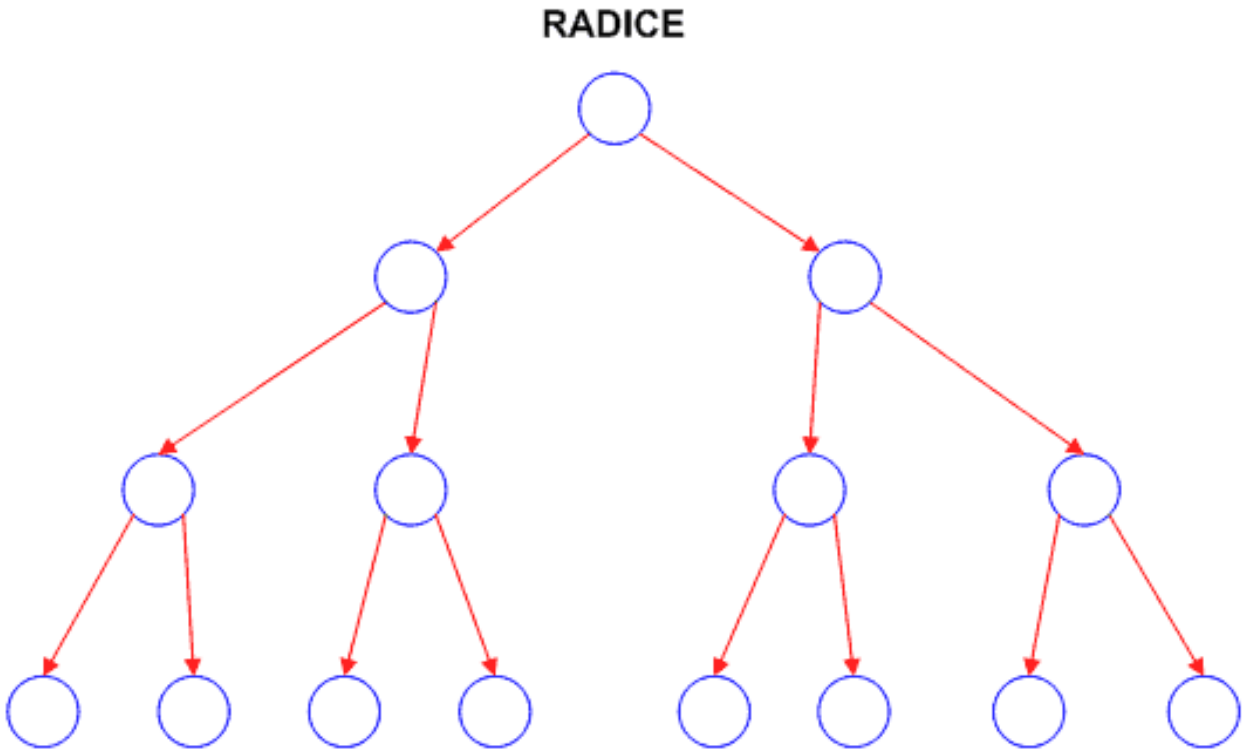


Un sottoalbero è una porzione di un albero che consiste di un nodo intermedio e tutti i suoi discendenti.

La struttura dati Albero (2)

Il numero di figli di ogni nodo di un albero può essere fiassato o variabile

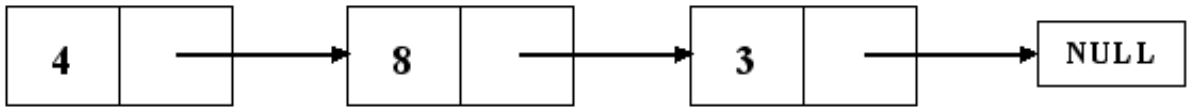
Quando il numero dei figli di ogni nodo è fissato a 2, l'albero si dice binario (come nell'esempio dell'albero genealogico)



Questo è un albero binario

La struttura dati Albero (3)

Quando il numero dei figli di ogni nodo è fissato a 1, l'albero in realtà descrive una lista concatenata

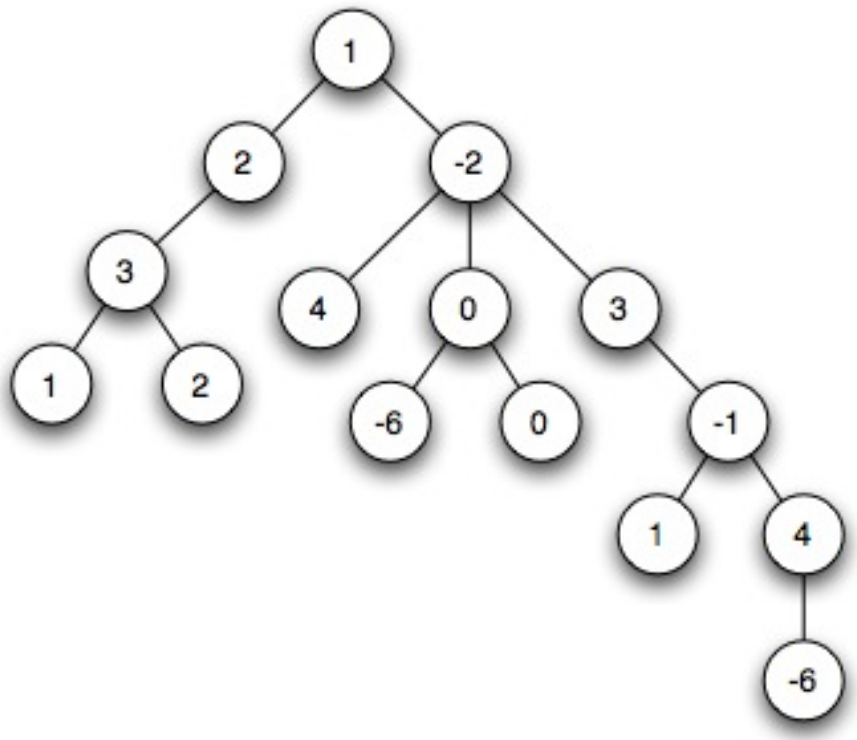


Una lista concatenata è una struttura dati che in Java si usa raramente

- le sue funzionalità (aggiungere e togliere elementi dalla sequenza) sono simili a quelle di `Vector`, `ArrayList` e altre strutture dati presenti nella Libreria Standard

La struttura dati Albero (4)

Quando il numero dei figli di ogni nodo può variare, in Java di solito i riferimenti ai figli si memorizzano tramite vettori



La struttura dati Albero (5)

Esempio: I generi letterari dei libri di una biblioteca

- Ogni generi (es. prosa, poesia, ...)
- ... ha tanti sotto-generi (es. romanzi, racconti, ...)
- ... che prevedono sotto-sotto-generi (es. romanzo storico, romanzo di avventura, ...)

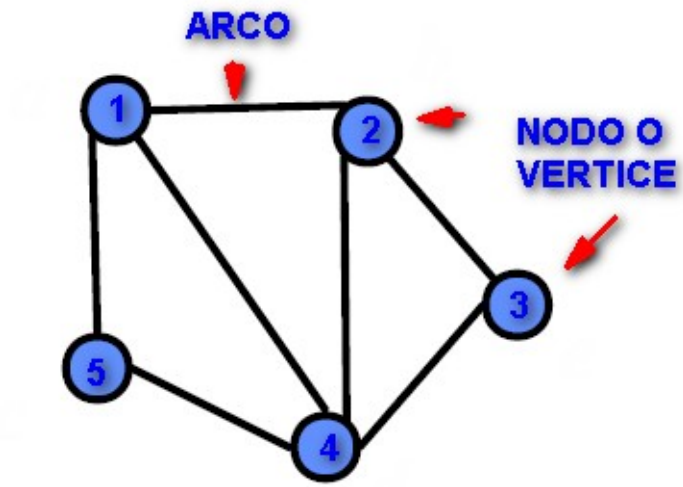
```
public class GenereLetterario {

  private String nomeGenere;
  private Vector<GenereLetterario> sottogeneri;

  //... costruttori e metodi
}
```

La struttura dati Grafo

Generalizzando un po' la definizione di albero, otteniamo un grafo

Un grafo:

- E' costituito da nodi (in Java sono oggetti)
- I nodi sono collegati da archi (in Java sono riferimenti, o oggetti aggiuntivi)



Molti programmi richiedono l'uso di grafi (es. gestione reti ferroviarie e stradali, social network, World Wide Web, ...)

Gli algoritmi che utilizzano grafi possono essere piuttosto complicati

- si va ben oltre gli scopi di questo corso...

La ricorsione (1)

Un programma è detto ricorsivo quando risolve un problema di una certa dimensione riutilizzando se stesso su un problema di dimensione minore

Nell'esempio dell'albero genealogico:

- il metodo che stampa l'albero (di un individuo) riutilizza se stesso per stampare un sottoalbero (di un geniore dell'individuo)

L'approccio ricorsivo si contrappone all'approccio iterativo in cui i problemi sono risolti mediante cicli

L'approccio ricorsivo può essere molto efficace (consente di scrivere alcuni programmi in poche righe) ma:

- può essere difficile da imparare ad utilizzare propriamente
- se usato impropriamente può causare problemi (es. mancata terminazione del programma)

La ricorsione (2)

Confrontiamo l'approccio iterativo e l'approccio ricorsivo.

Esempio (classico): Il calcolo del fattoriale $n! = n \cdot n-1 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

```
// soluzione iterativa
private int fattorialeIterativo(int n) {
  int ris = 1;
  for (int i=1; i<=n; i++)
    ris *= i;
  return ris;
}
```

```
// soluzione ricorsiva
private int fattorialeRicorsivo(int n) {
  if (n==0) return 1;
  else return n*fattorialeRicorsivo(n-1);
}
```

La ricorsione (3)

L'approccio ricorsivo è abbastanza comune in matematica:

- definiamo la funzione matematica $fattoriale(n)$

$$fattoriale(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0; \\ n \cdot fattoriale(n-1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La ricorsione (4)

Come tutte le chiamate di metodi, le chiamate ricorsive sono gestite tramite record di attivazione (rivedere lezioni precedenti)

La chiamata ricorsiva:

- sospende il metodo in corso di esecuzione
- attiva il metodo chimamato (una nuova istanza dello stesso metodo)
- quando al termine del metodo chiamato il controllo ritorna al chiamante

La ricorsione (5)

Esempio di metodo ricorsivo:

```
public void esempioRicorsione(int i) {
  if (i==0) System.out.println("ECCO 0");
  else {
    System.out.println("PRIMA " + i);
    esempioRicorsione(i-1);
    System.out.println("DOPO " + i);
  }
}
```

Chiamando il metodo come segue:

```
esempioRicorsivo(3);
```

Il risultato sarà:

```
PRIMA 3
PRIMA 2
PRIMA 1
ECCO 0
DOPO 1
DOPO 2
DOPO 3
```

La ricorsione (6)

Un metodo ricorsivo deve prevedere un numero di casi a seconda della dimensione del problema da affrontare

Dobbiamo avere:

- uno o più casi base che risolvono il problema senza bisogno di chiamate ricorsive
- uno o più casi ricorsivi che hanno bisogno di effettuare chiamate ricorsive per risolvere sottoproblemi

```
private int fattorialeRicorsivo(int n) {
  if (n==0) return 1; // caso base
  else return n*fattorialeRicorsivo(n-1); // caso ricorsivo
}
```

La ricorsione (7)

La condizione necessaria affinchè la ricorsione possa funzionare è che le chiamate ricorsive prima o poi raggiungano un caso base

- altrimenti il programma non terminerebbe mai... eseguirebbe chiamate ricorsive all'infinito

Vediamo un esempio di programma ricorsivo mal posto.

- che succede se si invoca il metodo con parametro dispari?

```
private int fattorialeDifettoso(int n) {
  if (n==0) return 1; // caso base
  else return n*fattorialeRicorsivo(n-2); // caso ricorsivo
}
```

La ricorsione (8)

Rivediamo l'esempio della stampa dell'albero genealogico

```
//nuovo metodo della classe Individuo

public void stampaAlberoGenealogico(int contatore) {
  // stampa tanti trattini quanti indicati da contatore
  for (int i=0; i<contatore; i++)
    System.out.println("--");
  System.out.println(nome);

  // chiamate ricorsive con contatore aumentato
  if (padre!=null) padre.stampaAlberoGenealogico(contatore+1);
  if (madre!=null) madre.stampaAlberoGenealogico(contatore+1);
}
```

In questo esempio:

- Abbiamo ricorsione multipla (2 chiamate ricorsive)
- Il caso base lo si ha quando `padre` e `madre` sono entrambi `null` (si stampa solo il nome)
- Il sottoproblema non è identificato dal parametro del metodo, ma dall'oggetto su cui il metodo è invocato
  - quando è chiamato su `bart`, radice dell'albero intero...
  - ... si richiama ricorsivamente su `homer` e `marge`, radici di sottoalberi

Esempio: la ricerca dicotomica (o binaria) (1)

Vediamo un esempio complesso di programma ricorsivo:

- La ricerca dicotomica (o ricerca binaria)

Supponiamo di avere un array ordinato contenente interi

- vogliamo sapere se un certo numero è contenuto nell'array

Esempio: la ricerca dicotomica (o binaria) (2)

Prima soluzione (iterativa)

```
public class Ricerca {

  public static void main(String[] args) {
    // array ordinato di lunghezza 12
    int[] a = { 2, 3, 6, 8, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 24, 30, 41 };

    boolean trovato = ricerca(a, 19); // restituisce false
  }

  // restituisce true se x e' presente in a
  private boolean ricerca(int[] a, int x) {
    boolean trovato = false;
    for (int y : a) {
      if (x==y) trovato=true;
    }
    return trovato;
  }

}
```

Esempio: la ricerca dicotomica (o binaria) (3)

Ragioniamo un attimo:

- l'algoritmo che abbiamo implementato va a guardare tutti i valori dell'array
  - se l'array è grande, questo può richiedere tempo
- non abbiamo sfruttato il fatto che gli elementi sono ordinati

Idea: come si cerca di solito una parola in un vocabolario?

Esempio: la ricerca dicotomica (o binaria) (4)

Altra soluzione:

- leggiamo il valore centrale dell'array e lo confrontiamo con il valore cercato
- il confronto ci dice se continuare la ricerca nella metà di destra o di sinistra dell'array
- ripetiamo la ricerca ricorsivamente nella metà selezionata

Quanti numeri dovremo leggere?

- Ad ogni passo ne buttiamo via la metà senza leggerli
- Alla fine avremo confrontato il numero cercato con un numero di valori dell'array pari al logaritmo della dimensione (quindi molti meno)
  - Nell'esempio i numeri erano 12, ma bastano 3 confronti...

Esempio: la ricerca dicotomica (o binaria) (5)

```
public class RicercaBinaria {

  public static void main(String[] args) {
    // array ordinato di lunghezza 12
    int[] a = { 2, 3, 6, 8, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 24, 30, 41 };

    boolean trovato = ricercaBinaria(a, 0, a.length, 19); // restituis
  }

  // restituisce true se x e' presente in a
  // sx e dx sono gli estremi destro e sinistro della porzione
  // di array che si considera
  public boolean ricercaBinaria (int[] a, int sx, int dx, int x) {
    boolean trovato;
    if (sx <= dx) {
      int centro = (sx+dx)/2; // calcola il centro
      if (x < a[centro])
        return ricercaBinaria(a, sx, centro-1, x);
      if (x > a[centro])
        return ricercaBinaria(a, centro+1, dx, x);
      if (x == a[centro])
        return true;
      }
    else
      return false;
    }
  }
}
```