

RiASSUNTO

- funzioni ricorsive
- punto $x = f(x)$
- $T: \mathbb{P}_A \rightarrow \mathbb{P}_A$ $X = T(X)$
 - ↳ eq. ricorsive
 - ↳ def. insiem.
- $T \begin{cases} \leq & 0 \text{ punt. fissi} \\ & 1 \text{ punto fisso} \\ & > 1 \text{ punti fissi } (\infty) \end{cases}$
- T monotona : $X \subseteq Y \Rightarrow T(X) \subseteq T(Y)$

Definizione

$T: \mathbb{P}_A \rightarrow \mathbb{P}_A$ si dice CONTINUA se,

data una qualunque sequenza di insiemi $X_0, X_1, \dots$

(anche infinita) Tale che

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$$

(sequenza non decrescente)

abbiamo

$$X_i \in \mathbb{P}_A$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i) = T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right)$$

$$T(X_0 \cup X_1 \cup X_2 \dots)$$

=

$$T(X_0) \cup T(X_1) \cup T(X_2) \dots$$

Essempio

$$T(x) = X \cup \{0\}$$

e^- continua?

dimostriamo che

Sia $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots$

verifichiamo

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) = \bigcup_{i \geq 0} T(X_i)$$

$$T(\bigcup_{i \geq 0} X_i)$$

$$= \{ \text{def. } a: T \}$$

$$\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) \cup \{0\}$$

$$= \{ \text{proprietà di } U \}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} (X_i \cup \{0\})$$

$$= \{ \text{def. } \delta: \top \}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T(x_i)$$

X_i	$T(X_i)$
$\emptyset$	$\{0\}$
$\{0\}$	$\{0\}$
$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
$\vdots$	

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} x_i\right) = \bigcup T(x_i)$$

$$\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) \cup \{0\} = \bigcup_{i \geq 0} (X_i \cup \{0\})$$

$X_0 = \{1, 2, 3\}$ $X_1 = \{2, 3, 4\}$
 $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{0\}$
 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
 $(\{1, 2, 3\} \cup \{0\}) \cup (\{2, 3, 4\} \cup \{0\})$
 $= \{0, 1, 2, 3, 4\}$

ESEMPIO

$$T(x) = \begin{cases} \emptyset & x \text{ è finito} \\ \{1\} & x \text{ è infinito} \end{cases}$$

$$T(\{1,2,3\}) = \emptyset$$

$$T(\mathbb{N}) = \{1\}$$

T è MONOTONA? $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow T(X_1) \subseteq T(X_2)$?

verifichiamolo (per casi)

① - X_1 e X_2 sono finiti

$$T(X_1) = \emptyset = T(X_2) \quad \text{banchemente } \underline{\text{vero!}}$$

② - X_1 e X_2 sono infiniti

$$T(X_1) = \{1\} = T(X_2) \quad \underline{\text{vero!}}$$

③ - X_1 è finito e X_2 è infinito (il contrario non è possibile)

$$T(X_1) = \emptyset \quad T(X_2) = \{1\}$$

$$\emptyset \subseteq \{1\} \quad \underline{\text{vero!}}$$

T è
monotona!

T è continua? No!

$$\forall i \quad X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$$

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) = \bigcup_{i \geq 0} (T(X_i)) \quad ?$$

Scegliamo $\{0\} \subseteq \{0,1\} \subseteq \{0,1,2\} \subseteq \dots \subseteq \{0,\dots,i\} \subseteq \dots$ (CONTROESEMPIO)

$X_0 \quad X_1 \quad X_2 \quad X_i$

$$\begin{aligned} & T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) \\ &= \{\text{def. deg. } x_i\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & T(\mathbb{N}) \\ &= \{\text{def. } T\} \\ & \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bigcup_{i \geq 0} (T(X_i)) \\ &= \{\text{def. } x_i \text{ e def. } T\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bigcup_{i \geq 0} \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$\neq$

T non è continua!

Teorema $T: \mathbb{P}_A \rightarrow \mathbb{P}_A$

Se T è CONTINUA, allora è anche MONOTONA

(ossia $T \text{ CONTINUA} \Rightarrow T \text{ MONOTONA}$)

Dimostrazione

Assumiamo T continua, dobbiamo dimostrare

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

notiamo che $X_1 \subseteq X_2$ costituiscono una sequenza di insiemi non decrescente
dalla continuità di T deduciamo che

$$T(X_1 \cup X_2) = T(X_1) \cup T(X_2)$$

$$\begin{aligned} & T(X_2) \\ = & \{ X_2 = X_1 \cup X_2 \} \\ & T(X_1 \cup X_2) \\ = & \{ \text{continuità di } T \} \\ & T(X_1) \cup T(X_2) \end{aligned}$$

$$\text{quindi } T(X_2) = T(X_1) \cup T(X_2)$$

$$\Rightarrow T(X_1) \subseteq T(X_2) \quad \text{quindi MONOTONA!}$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} X_1 & X_2 \\ \{0\} & \{0,1,2\} \end{matrix} \\ X_2 &= X_1 \cup X_2 \\ &= \{0\} \cup \{0,1,2\} \end{aligned}$$

TEOREMA DI RICORSIONE

Sia $T: \mathbb{P}_A \rightarrow \mathbb{P}_A$. Se T è CONTINUA:

- 1) $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)$ è un punto fisso di T
- 2) Dato $J \in \mathbb{P}_A$ tale che $J = T(J)$ (ossia è un punto fisso)
allora $I \subseteq J$

I^- è il minimo punto fisso di T

Cosa significa T^i ? applicazione T i volte

$$T^0(\emptyset) = \emptyset$$

$$T^0(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2, 3\}$$

$$T^1(\emptyset) = T(\emptyset)$$

$$T^2(\emptyset) = T(T(\emptyset))$$

$\vdots$

$$T^i(\emptyset) = T(\underbrace{T(\dots T(\emptyset))}_{i \text{ volte}} \dots)$$

ossia

$$T^i(\emptyset) = \begin{cases} \emptyset & i=0 \\ T(T^{i-1}(\emptyset)) & i>0 \end{cases}$$

ESEMPIO

$$T(x) = x \cup \{0\}$$

T continua

T infiniti p.f. $\{0\}, \{0,1\}, \dots$

$$I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)$$

$$\bigcup \left\{ \begin{array}{l} T^0(\emptyset) = \emptyset \\ T^1(\emptyset) = T(\emptyset) = \emptyset \cup \{0\} = \{0\} \\ T^2(\emptyset) = T(T^1(\emptyset)) = T(\{0\}) = \{0\} \cup \{0\} = \{0\} \\ \dots \\ T^3(\emptyset) = T(T^2(\emptyset)) = T(\{0\}) = \{0\} \cup \{0\} = \{0\} \\ \vdots \\ T^i(\emptyset) = \dots = \{0\} \end{array} \right.$$

$$I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset) = \emptyset \cup \{0\} \cup \{0\} \cup \dots = \{0\}$$

HO OTTENUTO

IL MINIMO

PUNTO FISSO DI T

(TUTTI GLI ALTRI INFINITI

PUNTI FISSI SONO SOVRASUMMI DI QUESTO)

Dimostrazione del Teorema di ricorsione.

→ partiamo con la dimostrazione del seguente Lemma

Lemma Sia $T: \mathbb{P}_A \rightarrow \mathbb{P}_A$ continua
Allora, per ogni $i \geq 0$ vale
$$T^i(\emptyset) \subseteq T^{i+1}(\emptyset)$$

applicare una volta in più la T fa "aumentare" il risultato

Per dimostrare questo Lemma usiamo il PRINCIPIO DI INDUZIONE

→ per dimostrare proprietà di insiemi infiniti (es. $\mathbb{N}$)

→ Data una proprietà $P(x)$ su $\mathbb{N}$ ($\forall m \in \mathbb{N}. P(m)$ è vera!)

Se

(caso base) $\leftarrow [1) P(0)$ è vera

(caso induttivo) $\leftarrow [2)$ assumendo $P(m)$ vera per un generico $m \in \mathbb{N}$
posso concludere che $P(m+1)$ vera

ipotesi induttiva

allora la proprietà P sarà vera per tutti i valori di $\mathbb{N}$

$$T^i(\emptyset) \subseteq T^{i+1}(\emptyset)$$

Dimostrazione del Lemma (per induzione)

caso base ($i=0$)

$$T^0(\emptyset) = \emptyset \subseteq T^1(\emptyset) \quad \text{banalmente}$$

caso induttivo

$$T^n(\emptyset) \subseteq T^{n+1}(\emptyset) \quad \text{] ipotesi induttiva}$$

$\Rightarrow$

$$T^{n+1}(\emptyset) \subseteq T^{n+2}(\emptyset) \quad ?$$

$$\begin{aligned} & T^{n+1}(\emptyset) \\ &= \{ \text{def. } T^i \} \\ & \quad T(T^n(\emptyset)) \\ &\subseteq \{ \text{ip. induttiva } T^n(\emptyset) \subseteq T^{n+1}(\emptyset) \\ & \quad T \text{ è continua, quindi } T \text{ è monotona} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & T \text{ monotona} \\ & X \subseteq Y \Rightarrow T(X) \subseteq T(Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & T(T^{n+1}(\emptyset)) \\ &= \{ \text{def. } T^i \} \end{aligned}$$

$$T^{n+2}(\emptyset)$$

$$\text{quindi } T^{n+1}(\emptyset) \subseteq T^{n+2}(\emptyset) \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ per il principio di induzione la proprietà

$$T^i(\emptyset) \subseteq T^{i+1}(\emptyset) \quad \text{vale } \forall i \in \mathbb{N}$$

Dimostriamo il primo punto del Teorema di Riconversione

T CONTINUA $\Rightarrow I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)$ e' un punto fisso di T

quindi $I = T(I)$

$$T(I)$$

$$= \{ \text{def. I} \}$$

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)\right)$$

$$= \{ \text{lemme e continuit  di } T \}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T(T^i(\emptyset))$$

$$= \{ \text{def. } T_i \}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T^{i+1}(\emptyset)$$

$$= \bigcup_{i \geq 1} T^i(\emptyset)$$

$$= \{A \cup \emptyset = A\}$$

$$\emptyset \cup \bigcup_{i \geq 1} T^i(\emptyset)$$

$$= \{T^0(\emptyset) = \emptyset\}$$

$$T^0(\emptyset) \cup \bigcup_{i \geq 1} T^i(\emptyset)$$

$$= \bigcup_{i \geq 0} T^i(\emptyset)$$

$$= \{ \text{def } \delta_i \mathbb{I} \}$$

1-

$$\begin{aligned} \text{e.g. } T^{0+1}(\phi) \cup T^{1+1}(\phi) \cup T^{2+1}(\phi) \dots \\ T^1(\phi) \cup T^2(\phi) \cup T^3(\phi) \dots \end{aligned}$$

$$I = T(I) \quad \text{punto fisso} \quad \checkmark$$