Modelli Matematici Ambientali - 12 Giugno 2018
seconda parte

Esercizio 1. La popolazione P di un allevamento di cavalli si evolve con tasso massimo di crescita pari a 0.2 $[1/m]$ ($m =$ mesi) e puó sostenere un livello massimo di 1000 unitá. Ogni mese vengono venduti 18 cavalli.
Si determini l'equazione differenziale che descrive il comportamento della popolazione dei cavalli. Si determinino i punti equilibrio dell'equazione differenziale studiandone la stabilitá e si dica quale sará approssimativamente il numero dei cavalli nel lungo periodo, in funzione di $P(0)$.

Esercizio 2. Un piccolo acquario é costituito da due vasche comunicanti tra loro. Per evitare la stagnazione dell'acqua e consentirne il ricambio, nella prima vasca viene immesso un flusso pari ad $\alpha > 0$ $[l/h]$ (ove $h =$ ore, $l =$ litri). L'acqua rimane nella prima vasca per un tempo medio di 2 ore ed il flusso uscente dalla prima vasca viene riversato nella seconda vasca nella quale rimane per un tempo medio di 3 ore. Una frazione pari a $\frac{3}{4}$ del flusso uscente viene fatta fuoriuscire dall' acquario mentre una frazione pari a $\frac{1}{4}$ del flusso uscente viene reimmessa nella prima vasca.
Si definisca un sistema di equazioni differenziali che formalizzi il comportamento del livello dell'acqua nelle due vasche e se ne determinino i punti di equilibrio in funzione del parametro α studiandone la stabilita'.
Si determini per quali valori di α il livello in ognuna delle due vasche sará superiore ad 800 litri nel lungo periodo.

Esercizio 3. Si scriva una `function L = livello_finale(alpha)` che simula il sistema di equazioni differenziali dell'esercizio 2 sull'intervallo temporale $[0, 50]$, a partire da un valore iniziale di $S_1(0) = S_2(0) = 0$ (entrambe le vasche vuote), e restituisce il livello dell'acqua nella prima vasca $S_1(50)$ dopo 50 ore. Si ricopi sul foglio il codice utilizzato e il valore calcolato di `livello_finale(300)`, cioè, il valore ottenuto con $\alpha = 300$.

Soluzione esercizio 1. L'equazione differenziale cercata e'

$$P'(t) = 0.2\left(\frac{1000-P}{1000}\right)P - 18.$$

I punti di equilibrio sono soluzione dell'equazione:

$$F(P) = 0.2P - \frac{2}{10000}P^2 - 18 = 0.$$

Le soluzioni sono $P_1 = 900$ e $P_2 = 100$. P_1 é un punto di equilibrio stabile essendo $F'(P_1) = 0.2 - \frac{4}{10000} \cdot 900 < 0$, mentre P_2 é un punto di equilibrio instabile essendo $F'(P_2) = 0.2 - \frac{4}{10000} \cdot 100 > 0$.

La numerositá della popolazione nel lungo periodo sará approssimativamente 900, se $P(0) > 100$, sará costantemente 100, se $P(0) = 100$, mentre, se $0 \leq P(0) < 100$ la popolazione si estinguerá in un tempo finito.

Soluzione esercizio 2. Siano S_1 ed S_2 i livelli delle due vasche. Il sistema di equazioni differenziali cercato é:

$$\begin{cases} S_1' = \alpha + \frac{1}{12}S_2 - \frac{1}{2}S_1 \\ S_2' = \frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{3}S_2 \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \frac{1}{12}S_2 - \frac{1}{2}S_1 = 0 \\ \frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{3}S_2 = 0 \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio del sistema e':

$$(S_1, S_2) = \left(\frac{8}{3}\alpha, 4\alpha\right).$$

Per quanto concerne lo studio della stabilita', la matrice Jacobiana delle derivate parziali associata al sistema e':

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A sono soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 + \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{8} = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = \frac{-5\pm\sqrt{7}}{12}$. Essendo tali valori reali negativi, il punto di equilibrio $\left(\frac{8}{3}\alpha, 4\alpha\right)$ é asintoticamente stabile.

Il livello in ognuna delle due vasche sará superiore ad 800 litri, nel lungo periodo, per $\alpha > 300$ $[l/h]$.

Soluzione esercizio 3.

Una soluzione basata sul metodo di Eulero esplicito è la seguente.

```
function L = livello_finale(alpha)

tempo_finale = 50;

valore_iniziale = [0;0];

n = 1000;

S1 = zeros(1, n+1);
S2 = zeros(1, n+1);
t = zeros(1, n+1);

h = tempo_finale / n;
t(1) = 0;
S1(1) = valore_iniziale(1);
S2(1) = valore_iniziale(2);


for i = 1:n
    t(i+1) = t(i) + h;
    S1(i+1) = S1(i) + h * (alpha - 1/2*S1(i) + 1/12*S2(i));
    S2(i+1) = S2(i) + h * (1/2*S1(i) - 1/3*S2(i));
end

L = S1(end);

% plot(t, S1, t, S2); % se si desidera un grafico
```

Una soluzione basata sulla funzione `ode45` di Matlab è la seguente.

```
function L = livello_finale(alpha)

tempo_finale = 50;

valore_iniziale = [0, 0];

f = @(t, x) [alpha-1/2*x(1)+1/12*x(2); 1/2*x(1)-1/3*x(2)];
[t, x] = ode45(f, [0, tempo_finale], valore_iniziale);

L = x(end, 1);

% plot(t, x); % se si desidera un grafico
```

La prima soluzione fornisce $S_1(50) = 799.98$ per $\alpha = 300$; la seconda $S_1(50) = 799.96$.