Compito di Ricerca Operativa del 23-6-2008

Esercizio 1. Si consideri il problema $P(a,k)$

$$\min\ (4x_1 + kx_2 - x_3 + x_4 + 2x_5)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\quad - x_4 + 2x_5 = a \\ \qquad 4x_2 + 3x_3 \qquad\qquad\quad = 3 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ove a, k sono parametri reali.

Dire, giustificando la risposta, per quali valori dei parametri $a, k \in \mathbb{R}$

(i) In una soluzione ottima si ha $x_4 = x_5 = 1$;

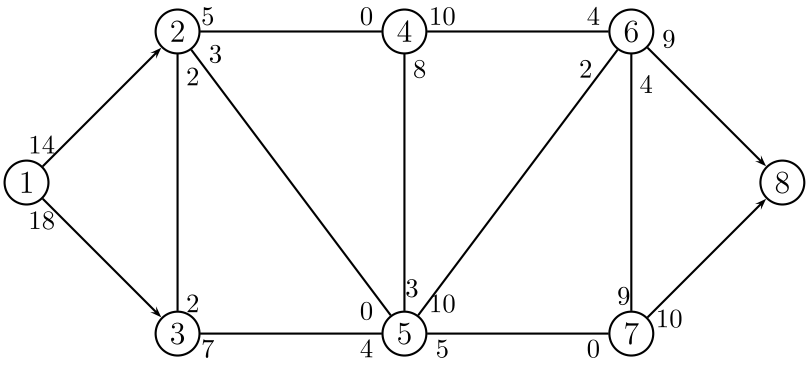
(ii) In una soluzione ottima si ha $x_4 = x_5 = 1$ e, inoltre, tale soluzione e' unica;

(3i) Detta $\bar{x}(a)$ la soluzione trovata al punto (ii), determinare le soluzioni ottime del problema duale associato a $P(a,k)$ nel caso in cui $\bar{x}(a)$ e' una soluzione ottima di $P(a,k)$, discutendone l'unicita';

(4i) $\lambda := (0, -1, 1)$ e' soluzione ottima del problema duale associato a $P(a,k)$;

(5i) Il problema duale associato a $P(a,k)$ e' illimitato.

Esercizio 2. Si consideri il problema (P) del massimo flusso sulla rete:



Si determini

a) il flusso massimo della rete;

b) una soluzione ottima di P ;

c) una sezione di minima capacita';

d) una soluzione ottima del problema duale associato a P;

e) Sia $k > 0$ la capacita' dell'arco $(3, 5)$; si determini, al variare di k, il flusso massimo della rete.

Esercizio 3. Con riferimento alla rete definita nell'esercizio 2, in cui i valori indicati sugli archi sono interpretati come lunghezze.

a) Si determini l'albero dei cammini di minima lunghezza di radice il nodo 1.

b) Sia $k > 0$ la lunghezza dell'arco $(4, 6)$; si determini, al variare di k, l'albero dei cammini minimi di radice il nodo 1.