Compito di Ricerca Operativa del 20-6-2007

Esercizio 1. Si consideri il problema $P(a, k)$

$$\min\ (kx_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \qquad + x_4 \qquad = 1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 \ = a \\ 3x_1 \qquad - x_3 \qquad - x_5 \ = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ove a, k sono parametri reali.

Dire, giustificando la risposta, per quali valori dei parametri $a, k \in \mathbb{R}$

(i) Il problema $P(a, k)$ ammette ottimo finito;

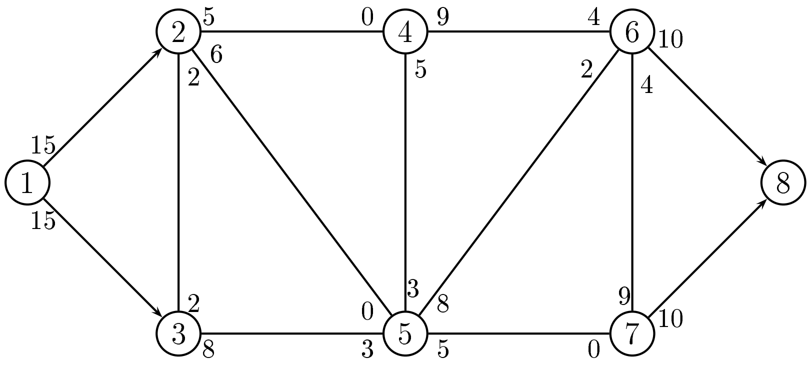
(ii) $\bar{x} := (2, 1, 0, 0, 5)$ e' una soluzione ottima;

(3i) la soluzione ottima $\bar{x}$ e' unica;

(4i) In riferimento al quesito (ii), determinare le soluzioni ottime del problema duale associato a $P(a, k)$ nel caso in cui $\bar{x}$ e' una soluzione ottima di $P(a, k)$, discutendone l'eventuale degenerazione;

(5i) Il problema duale associato a $P(a, k)$ e' illimitato.

Esercizio 2. Si consideri il problema (P) del massimo flusso sulla rete:



Si determini

a) il flusso massimo della rete;

b) una soluzione ottima di P ;

c) una sezione di minima capacita';

d) una soluzione ottima del problema duale associato a P;

e) Sia $k > 0$ la capacita' dell'arco $(4, 6)$; si determini, al variare di k, il flusso massimo della rete.

Esercizio 3. Con riferimento alla rete definita nell'esercizio 2, in cui i valori indicati sugli archi sono interpretati come lunghezze.

a) Si determini l'albero dei cammini di minima lunghezza di radice il nodo 1.

b) Sia $k > 0$ la lunghezza dell'arco $(2, 5)$; si determini, al variare di k, il cammino minimo dal nodo 1 al nodo 8.