Esame di Ricerca Operativa del 07/09/2016

(Cognome)	(Nome)	(Matricola)

Esercizio 1. Un'industria chimica produce due tipi di fertilizzanti (A e B) la cui lavorazione è affidata ai reparti di produzione e di confezionamento. Per ottenere il fertilizzante pronto per la vendita, è necessaria la lavorazione in entrambi i reparti. I tempi di lavorazione (in ore) per produrre una tonnellata di prodotto sono i seguenti:

	Fertilizzante A	Fertilizzante B
reparto produzione	2	1.5
reparto confezionamento	0.5	1

Ogni settimana il reparto di produzione lavora al massimo 100 ore e quello di confezionamento al massimo 50 ore. Inoltre l'industria vuole che la quantità prodotta di fertilizzante A non superi il 50% della quantità di fertilizzante B. Sapendo che la vendita di una tonnellata di fertilizzante A fornisce un profitto di 250 euro ed una di fertilizzante B 300 euro, l'industria vuole determinare le quantità di ciascun tipo di fertilizzante da produrre settimanalmente in modo da massimizzare il profitto complessivo.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 + 3\ x_2 \\ -x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 0 \\ -x_1 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{2, 4}	$x =$		
{3, 6}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{1,2}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 9\ x_2 \\ 8\ x_1 + 7\ x_2 \geq 54 \\ 6\ x_1 + 19\ x_2 \geq 62 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	18	22	19	27
2		29	21	17
3			15	16
4				14

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

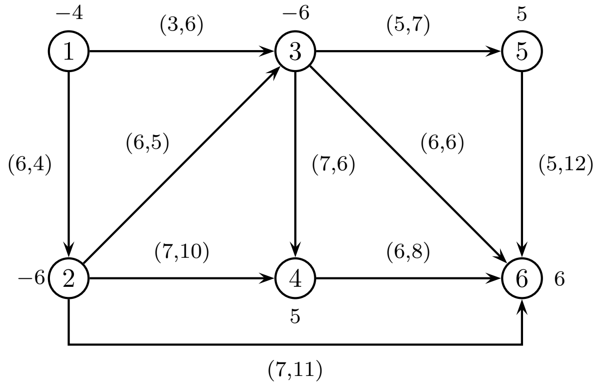
3–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{45}, x_{23}.

Esercizio 6. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

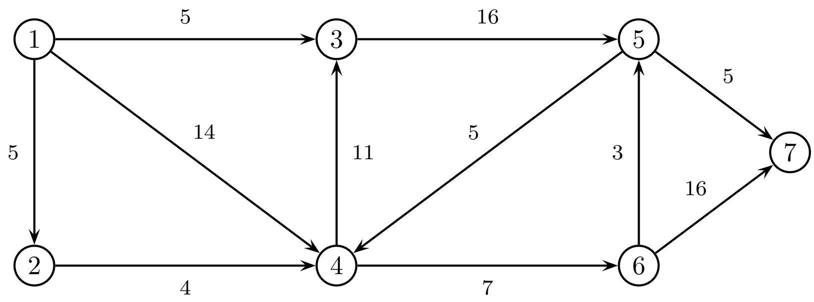


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,3) (3,4) (4,6) (5,6)	(1,2) (2,4)	$x =$		
(1,2) (2,4) (2,6) (3,5) (5,6)	(3,4) (3,6)	$\pi = (0,$		

Esercizio 7. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

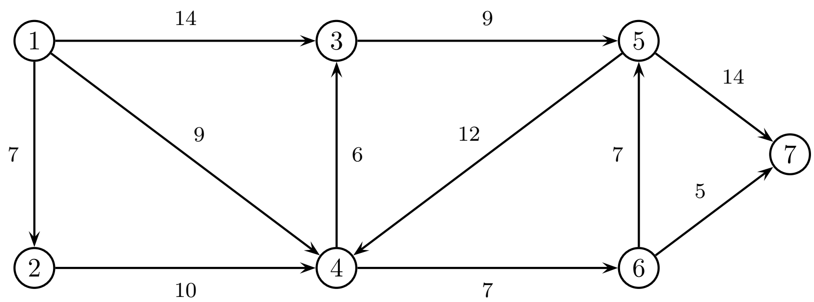
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,4) (3,5) (3,6)	
Archi di U	(1,2) (2,3)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 8. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

SOLUZIONI

Esercizio 1.
Variabili decisionali: x_A = tonnellate di fertilizzante A, x_B = tonnellate di fertilizzante B
Modello:

$$\begin{cases} \max\ 250\ x_A + 300\ x_B \\ 2\ x_A + 1.5\ x_B \leq 100 \\ 0.5\ x_A + x_B \leq 50 \\ x_A \leq 0.5\ x_B \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.

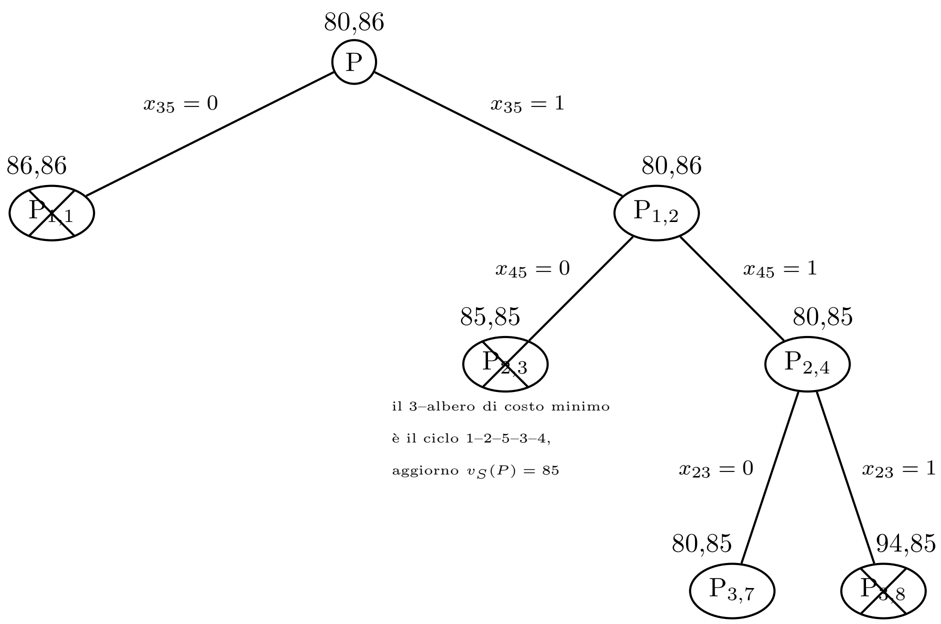
Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{2,\ 4\}$	$x = (0,\ 5)$	NO	SI
$\{3,\ 6\}$	$y = (0,\ 0,\ 7,\ 0,\ 0,\ 3)$	SI	NO

Esercizio 3.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{1,\ 2\}$	$(0,\ 0)$	$(-3,\ -4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$	1	$5,\ 2,\ 5$	5
2° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(0,\ 2)$	$(0,\ -10,\ 0,\ 0,\ 3,\ 0)$	2	$3,\ 1,\ 3$	4

Esercizio 4.
a) sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \frac{54}{7}\right)$ $\qquad v_I(P) = 70$
b) sol. ammissibile = $(0, 8)$ $\qquad v_S(P) = 72$
c)
$r = 2 \qquad 7\,x_1 + 6\,x_2 \geq 47$
$r = 4 \qquad 3\,x_1 + 2\,x_2 \geq 16$

Esercizio 5.
a) 3–albero: (1 , 2) (2 , 5) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 80$
b) ciclo: 2 – 5 – 4 – 3 – 1 $\qquad v_S(P) = 86$
c)



Esercizio 6.

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,3) (3,4) (4,6) (5,6)	(1,2) (2,4)	$x = (4,\ 0,\ 0,\ 10,\ 0,\ 6,\ 0,\ 0,\ 11,\ -5)$	NO	SI
(1,2) (2,4) (2,6) (3,5) (5,6)	(3,4) (3,6)	$\pi = (0,\ 6,\ 3,\ 13,\ 8,\ 13)$	SI	SI

Esercizio 7.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,4) (3,5) (3,6)	(1,3) (2,4) (3,4) (3,5) (3,6)
Archi di U	(1,2) (2,3)	(2,3)
x	(4, 0, 5, 5, 0, 0, 5, 6, 0, 0)	(0, 4, 5, 1, 0, 4, 5, 6, 0, 0)
π	(0, 3, 3, 10, 8, 9)	(0, 3, 3, 10, 8, 9)
Arco entrante	(1,2)	(2,3)
ϑ^+, ϑ^-	6 , 4	9 , 4
Arco uscente	(1,2)	(3,4)

Esercizio 8.
a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		3		4		6		5		7	
nodo 2	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 3	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 4	14	1	9	2	9	2	9	2	9	2	9	2	9	2
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	21	3	21	3	19	6	19	6	19	6
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	16	4	16	4	16	4	16	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	32	6	24	5	24	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4		4, 5		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	9	(0, 9, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 9, 0, 0)	9
1 - 4 - 6 - 7	5	(0, 9, 5, 0, 9, 0, 5, 0, 9, 0, 5)	14
1 - 4 - 6 - 5 - 7	2	(0, 9, 7, 0, 9, 0, 7, 0, 11, 2, 5)	16

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $N_t = \{5, 6, 7\}$