Esame di Ricerca Operativa del 11/07/2016

(Cognome) **(Nome)** **(Matricola)**

Esercizio 1. Un'erboristeria vuole produrre una nuova tisana utilizzando 4 tipi di tisane già in commercio. Tali tisane sono per lo più composte da camomilla, timo e verbena. La loro composizione ed il costo al kg sono indicate nella seguente tabella:

	Tisane			
	1	2	3	4
Percentuale di camomilla	30	20	40	20
Percentuale di timo	20	60	30	40
Percentuale di verbena	40	15	25	30
Costo (€/kg)	10	15	20	15

La nuova tisana è costituita esattamente dal 30% di camomilla, da almeno il 30% di timo e da almeno il 20% di verbena. Determinare le percentuali di ciascun tipo di tisana da usare per produrre la nuova tisana in modo da minimizzare il costo di produzione.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\,x_1 - 8\,x_2 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 6 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{4, 6}	$x =$		
{3, 4}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2,5}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\,x_1 + 19\,x_2 \\ 14\,x_1 + 9\,x_2 \leq 66 \\ 9\,x_1 + 11\,x_2 \leq 49 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	6	26	18	27
2		19	10	20
3			29	24
4				22

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

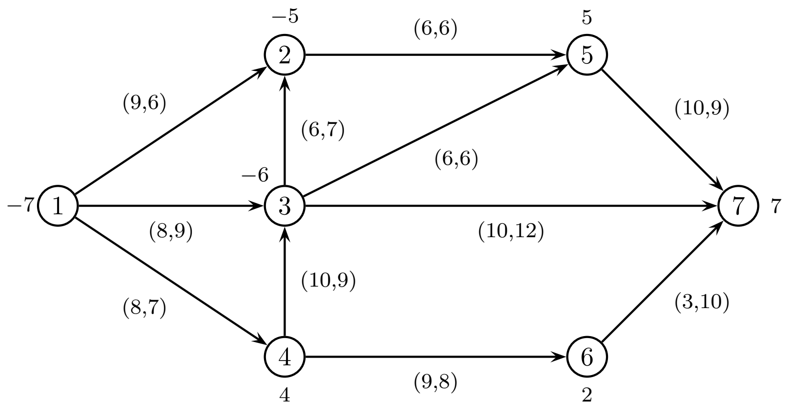
2–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{12}, x_{24}, x_{14}.

Esercizio 6. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

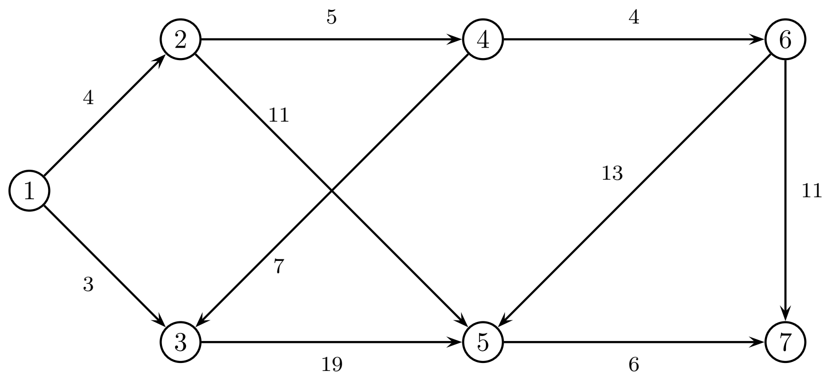


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (3,2) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,4) (3,5)	$x =$		
(1,3) (3,2) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,2) (3,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 7. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

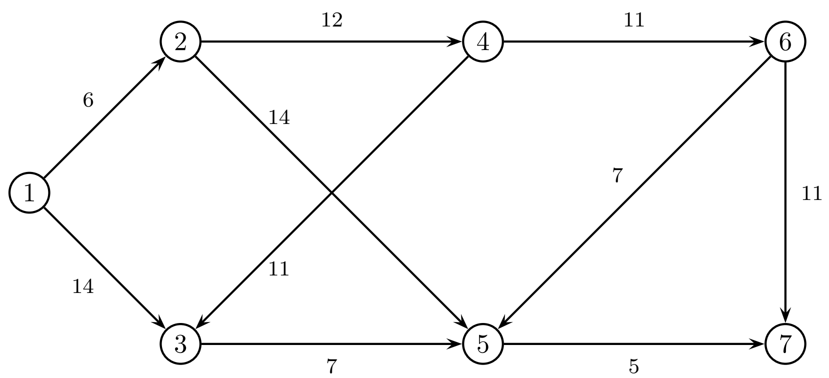
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (1,4) (4,6) (5,7) (6,7)	
Archi di U	(2,5) (3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 8. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

SOLUZIONI

Esercizio 1. Variabili decisionali:

$$\begin{cases} x_1 = \text{percentuale di tisana 1 da usare nella miscela,} \\ x_2 = \text{percentuale di tisana 2 da usare nella miscela,} \\ x_3 = \text{percentuale di tisana 3 da usare nella miscela,} \\ x_4 = \text{percentuale di tisana 4 da usare nella miscela.} \end{cases}$$

Modello:

$$\begin{cases} \min\ 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 15x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.4x_3 + 0.2x_4 = 30 \\ 0.2x_1 + 0.6x_2 + 0.3x_3 + 0.4x_4 \geq 30 \\ 0.4x_1 + 0.15x_2 + 0.25x_3 + 0.3x_4 \geq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{4,\ 6\}$	$x = (6,\ -4)$	NO	SI
$\{3,\ 4\}$	$y = (0,\ 0,\ 3,\ 8,\ 0,\ 0)$	SI	NO

Esercizio 3.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(4,\ -2)$	$\left(0,\ -\frac{11}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{2},\ 0\right)$	2	$8,\ 4$	4
2° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$(2,\ -4)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 11,\ -3,\ 0)$	5	2	3

Esercizio 4.

a) sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \frac{49}{11}\right)$ $\qquad v_S(P) = 84$

b) sol. ammissibile $= (0, 4)$ $\qquad v_I(P) = 76$

c)

$r = 2 \qquad x_2 \leq 4$

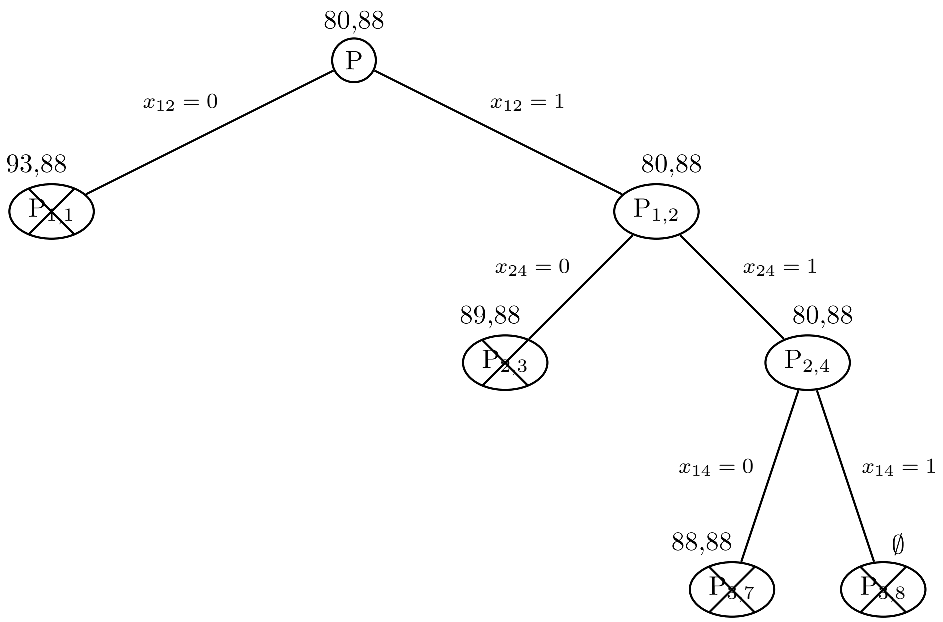
$r = 3 \qquad x_1 + 2\,x_2 \leq 8$

Esercizio 5.

a) 2–albero: (1 , 2) (1 , 4) (2 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 80$

b) ciclo: $1 - 2 - 4 - 5 - 3$ $\qquad v_S(P) = 88$

c)



Il ciclo $1 - 2 - 4 - 5 - 3$ è ottimo.

Esercizio 6.

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (3,2) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,4) (3,5)	$x = (0,\ 0,\ 7,\ 0,\ -5,\ 6,\ 6,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0)$	NO	SI
(1,3) (3,2) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,2) (3,5)	$\pi = (0,\ 14,\ 8,\ -2,\ 8,\ 7,\ 18)$	NO	NO

Esercizio 7.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (1,4) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,3) (1,4) (2,5) (4,6) (5,7) (6,7)
Archi di U	(2,5) (3,5)	(3,5)
x	(1, 0, 6, 6, 0, 6, 0, 0, 2, 7, 0)	(0, 0, 7, 5, 0, 6, 0, 0, 3, 6, 1)
π	(0, 9, 8, 8, 10, 17, 20)	(0, 4, 8, 8, 10, 17, 20)
Arco entrante	(2,5)	(3,5)
ϑ^+, ϑ^-	1 , 1	0 , 0
Arco uscente	(1,2)	(1,3)

Esercizio 8.

a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		4		6		5		7	
nodo 2	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 3	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	9	2	9	2	9	2	9	2	9	2
nodo 5	$+\infty$	-1	22	3	15	2	15	2	15	2	15	2	15	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	13	4	13	4	13	4	13	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	24	6	21	5	21	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	5	(5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 5, 0, 0)	5
1 - 2 - 4 - 6 - 7	1	(6, 0, 1, 5, 0, 0, 1, 5, 0, 1)	6
1 - 3 - 5 - 2 - 4 - 6 - 7	5	(6, 5, 6, 0, 5, 0, 6, 5, 0, 6)	11

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 3, 5\}$ $N_t = \{2, 4, 6, 7\}$