Esame di Ricerca Operativa del 04/04/2016

(Cognome)	(Nome)	(Matricola)

Esercizio 1. Una ditta produce hamburger di due qualità: A e B. 10 kg di prodotto di tipo A si ricavano da 5 kg di tritato di carne, 1 kg di uova, 2 kg di farina e 2 kg di pangrattato. Produrre 10 kg del tipo B richiede, invece, 8 kg di tritato di carne, 0.5 kg di uova, 1 kg di farina e 0.5 kg di pangrattato. Le scorte di materia prima della ditta sono 600 kg di tritato di carne, 500 kg di uova, 200 kg di farina e 100 kg di pangrattato. Sapendo che i profitti ricavati dalla vendita di 1 kg di hamburger di tipo A e B sono rispettivamente di 10 Euro e 12 Euro, determinare quanti kg di hamburger di tipo A e B deve produrre la ditta in modo da massimizzare il profitto complessivo.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$
\begin{cases}
\max\ -8\ x_1 - 7\ x_2 \\
-2\ x_1 + x_2 \leq 4 \\
-2\ x_1 - x_2 \leq 8 \\
2\ x_1 + x_2 \leq -4 \\
x_1 \leq -1 \\
-x_2 \leq 4 \\
-x_1 \leq 3
\end{cases}
$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 6}	$x =$		
{3, 6}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,4}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 15\ x_1 + 8\ x_2 \\ 14\ x_1 + 11\ x_2 \leq 68 \\ 6\ x_1 + 15\ x_2 \leq 64 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	18	17	26	21
2		20	13	14
3			16	28
4				15

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

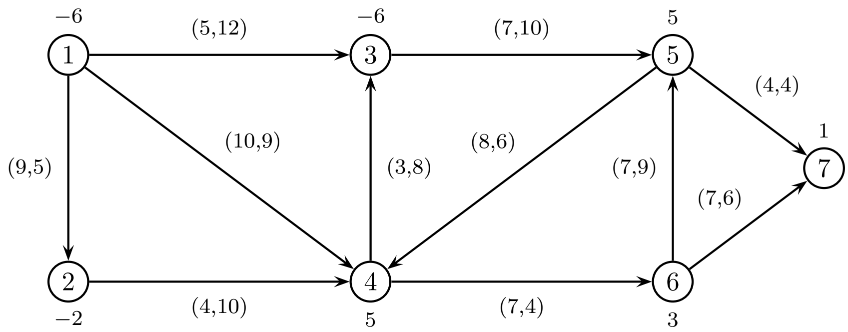
5–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{24}, x_{35}.

Esercizio 6. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

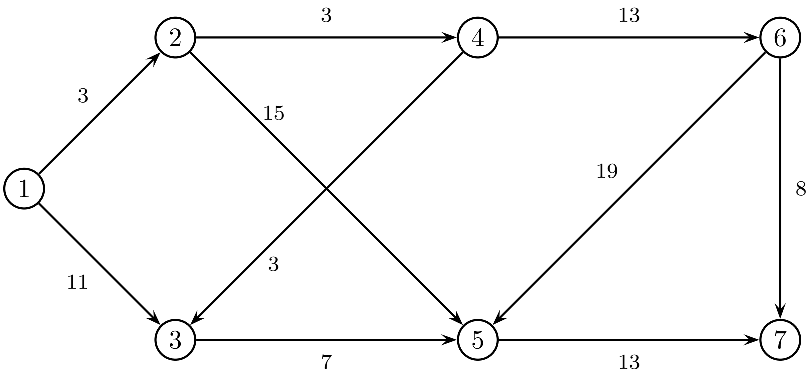


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,3) (6,5)	$x =$		
(1,2) (1,3) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,4) (5,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 7. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

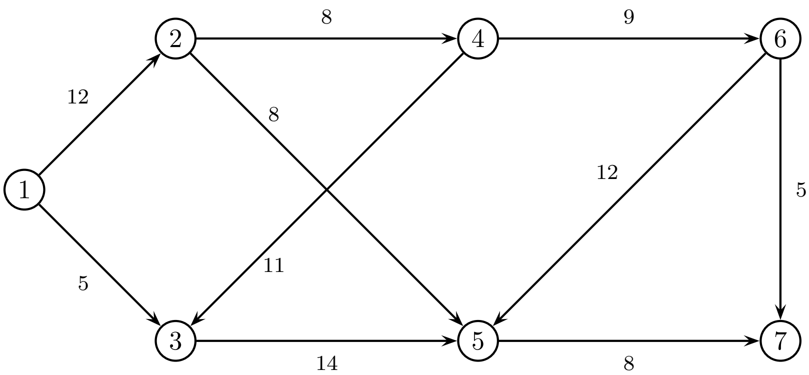
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5)	
Archi di U	(1,2) (4,6)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 8. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

SOLUZIONI

Esercizio 1. Variabili decisionali: x_1 = kg di hamburger A, x_2 = kg di hamburger B.
Modello:

$$\begin{cases} \max\ 10x_1 + 12x_2 \\ 0.5x_1 + 0.8x_2 \le 600 \\ 0.1x_1 + 0.05x_2 \le 500 \\ 0.2x_1 + 0.1x_2 \le 200 \\ 0.2x_1 + 0.05x_2 \le 100 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.

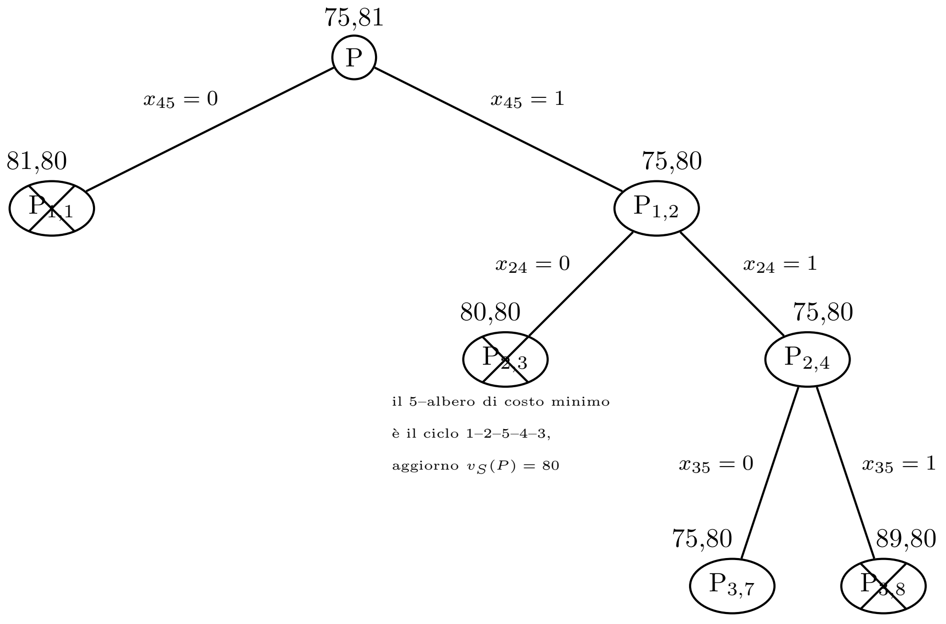
Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 6\}$	$x = (-3,\ -2)$	SI	SI
$\{3, 6\}$	$y = (0,\ 0,\ -7,\ 0,\ 0,\ -6)$	NO	NO

Esercizio 3.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{3, 4\}$	$(-1,\ -2)$	$(0,\ 0,\ -7,\ 6,\ 0,\ 0)$	3	4, 2	5
2° iterazione	$\{4, 5\}$	$(-1,\ -4)$	$(0,\ 0,\ 0,\ -8,\ 7,\ 0)$	4	3, 1, 2	2

Esercizio 4.
a) sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{34}{7}, 0\right)$ $\quad v_S(P) = 72$
b) sol. ammissibile = $(4, 0)$ $\quad v_I(P) = 60$
c)
$r = 1 \quad x_1 \le 4$
$r = 4 \quad 4\,x_1 + 3\,x_2 \le 19$

Esercizio 5.
a) 5–albero: (1 , 3) (2 , 4) (2 , 5) (3 , 4) (4 , 5) $\quad v_I(P) = 75$
b) ciclo: 3 – 4 – 2 – 5 – 1 $\quad v_S(P) = 81$
c)



Esercizio 6.

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,3) (6,5)	$x = (-6,\ 12,\ 0,\ -4,\ 0,\ -18,\ 9,\ 0,\ 4,\ 9,\ -3)$	NO	SI
(1,2) (1,3) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,4) (5,4)	$\pi = (0,\ 9,\ 5,\ 2,\ 12,\ 9,\ 16)$	NO	SI

Esercizio 7.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5)	(1,4) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5)
Archi di U	(1,2) (4,6)	(1,2) (4,6)
x	(5, 1, 0, 7, 7, 0, 4, 2, 1, 1, 0)	(5, 0, 1, 7, 6, 0, 4, 1, 1, 1, 0)
π	(0, 16, 5, 20, 12, 5, 16)	(0, 6, −5, 10, 2, −5, 6)
Arco entrante	(1,4)	(1,2)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 1	8 , 5
Arco uscente	(1,3)	(1,2)

Esercizio 8.
a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		5		6		7	
nodo 2	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 3	11	1	11	1	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4
nodo 4	$+\infty$	-1	6	2	6	2	6	2	6	2	6	2	6	2
nodo 5	$+\infty$	-1	18	2	18	2	16	3	16	3	16	3	16	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	19	4	19	4	19	4	19	4	19	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	29	5	27	6	27	6
insieme Q	2, 3		3, 4, 5		3, 5, 6		5, 6		6, 7		7		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	8	(8, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 8, 0, 0)	8
1 - 2 - 4 - 6 - 7	4	(12, 0, 4, 8, 0, 0, 4, 8, 0, 4)	12
1 - 3 - 5 - 2 - 4 - 6 - 7	1	(12, 1, 5, 8, 1, 0, 5, 8, 0, 5)	13

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$