

(Cognome)

(Nome)

(Matricola)

Esercizio 1. Una banca offre ai suoi clienti 3 diversi tipi di prestito: mutuo casa, credito auto, credito famiglia, che rendono un interesse annuo rispettivamente del 5%, 8% e 7%. La banca ha a disposizione 350 milioni di euro e deve erogare i prestiti in modo che:

- il mutuo casa rappresenti almeno il 30% di tutti i prestiti erogati;
- il credito auto non superi il 20% di tutti i prestiti erogati;
- il tasso di interesse medio su tutti i prestiti non superi il 6.5%.

La banca vuole determinare quanti euro erogare per ogni tipo di prestito in modo da massimizzare il suo profitto.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max & -x_1 + x_2 \\ & x_2 \leq 0 \\ & -4x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq -6 \\ & -x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 0 \\ & 2x_1 + x_2 \leq -3 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenerare (si/no)
{4, 5}	$x =$		
{1, 2}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,6}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min 9 x_1 + 17 x_2 \\ 19 x_1 + 15 x_2 \geq 60 \\ 14 x_1 + 18 x_2 \geq 57 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$
--------------------------------	------------

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$
--------------------	------------

c) Calcolare un taglio di Gomory.

r =	taglio:
-----	---------

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	16	15	27	19
2		25	20	17
3			14	12
4				13

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4-albero di costo minimo.

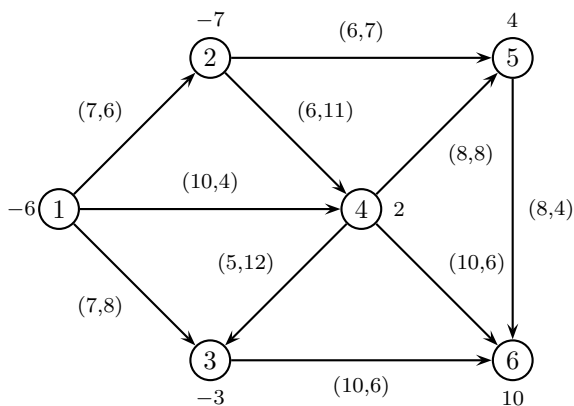
4-albero:	$v_I(P) =$
-----------	------------

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo:	$v_S(P) =$
--------	------------

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34} , x_{35} , x_{45} .

Esercizio 6. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

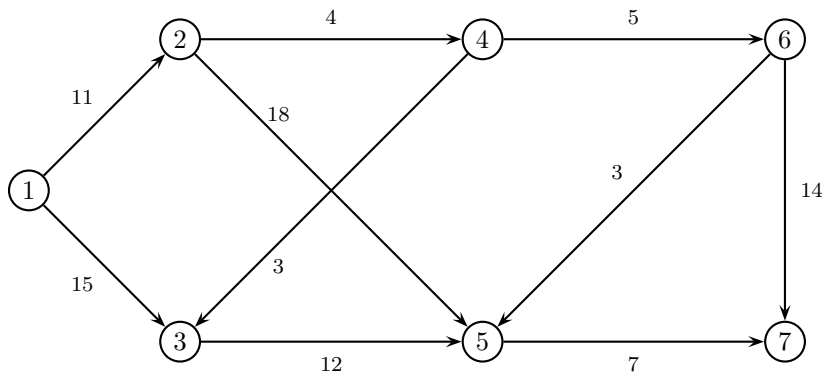


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenerare (si/no)
(1,3) (2,4) (3,6) (4,6) (5,6)	(4,3) (4,5)	$x =$		
(1,2) (2,4) (4,3) (4,6) (5,6)	(1,4) (3,6)	$\pi = (0,$		

Esercizio 7. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

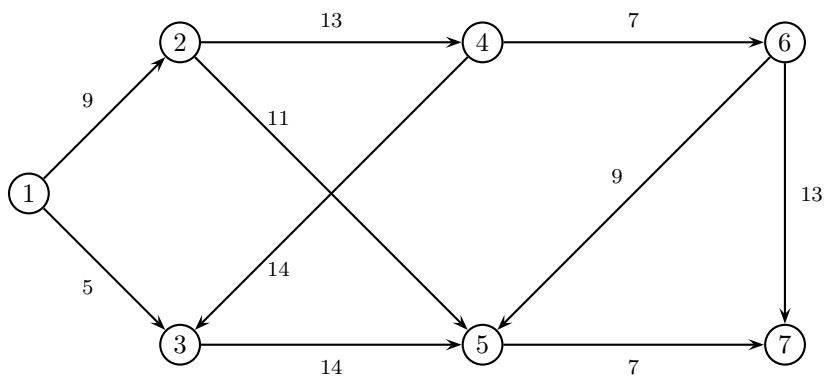
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (4,3) (4,5) (4,6)	
Archi di U	(2,4) (3,6)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 8. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$

$N_t =$

SOLUZIONI

Esercizio 1. Variabili decisionali:

x_1 = milioni di euro erogati per il mutuo casa
 x_2 = milioni di euro erogati per il credito auto
 x_3 = milioni di euro erogati per il credito famiglia

Modello:

$$\begin{cases} \max 0.05 x_1 + 0.08 x_2 + 0.07 x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 350 \\ x_1 \geq 0.3 (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_2 \leq 0.2 (x_1 + x_2 + x_3) \\ 0.05 x_1 + 0.08 x_2 + 0.07 x_3 \leq 0.065 (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenerare (si/no)
{4, 5}	$x = (0, -4)$	SI	NO
{1, 2}	$y = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0\right)$	SI	NO

Esercizio 3.

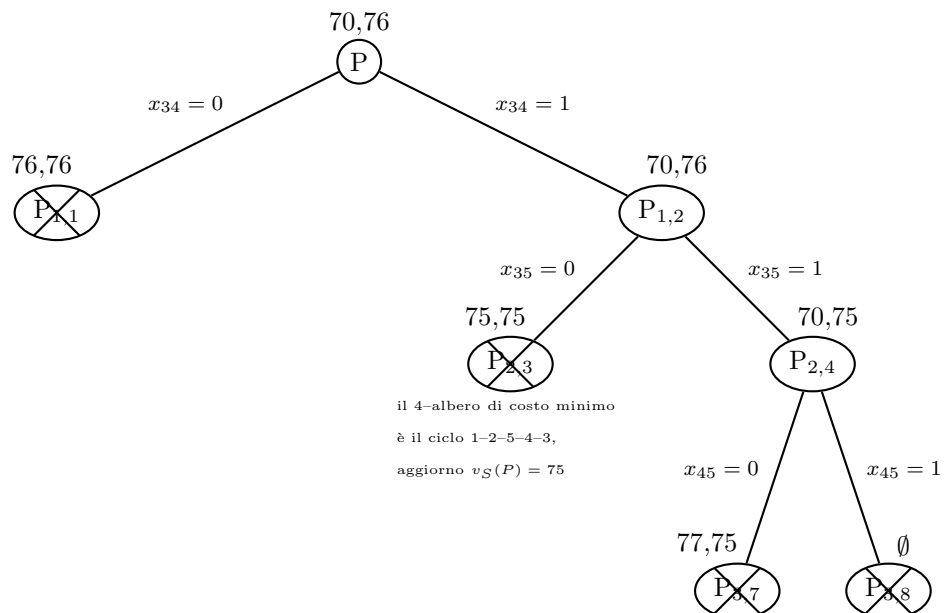
	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3, 6}	(0, -3)	(0, 0, 3, 0, 0, -5)	6	$1, \frac{15}{11}$	1
2° iterazione	{1, 3}	(-2, 0)	$\left(\frac{5}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 0, 0, 0\right)$	3	3	2

Esercizio 4.

- a) sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{57}{14}, 0\right)$ $v_I(P) = 37$
 b) sol. ammissibile = (5, 0) $v_S(P) = 45$
 c)
 $r = 1 \quad 13x_1 + 17x_2 \geq 53$
 $r = 3 \quad 9x_1 + 12x_2 \geq 37$

Esercizio 5.

- a) 4-albero: (1, 2) (1, 3) (3, 4) (3, 5) (4, 5) $v_I(P) = 70$
 b) ciclo: 1 - 3 - 5 - 4 - 2 $v_S(P) = 76$
 c)



Esercizio 6.

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenerare (si/no)
(1,3) (2,4) (3,6) (4,6) (5,6)	(4,3) (4,5)	$x = (0, 6, 0, 7, 0, 21, 12, 8, -15, 4)$	NO	SI
(1,2) (2,4) (4,3) (4,6) (5,6)	(1,4) (3,6)	$\pi = (0, 7, 18, 13, 15, 23)$	NO	NO

Esercizio 7.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (4,3) (4,5) (4,6)	(1,2) (1,3) (4,3) (4,5) (4,6)
Archi di U	(2,4) (3,6)	(2,4) (3,6)
x	(4, 0, 2, 11, 0, 6, 3, 4, 4, 0)	(4, 2, 0, 11, 0, 6, 1, 4, 4, 0)
π	(0, 7, 15, 10, 18, 20)	(0, 7, 7, 2, 10, 12)
Arco entrante	(1,3)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	8, 2	6, 1
Arco uscente	(1,4)	(4,3)

Esercizio 8.

a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		3		4		6		5		7	
nodo 2	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1
nodo 3	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 4	$+\infty$	-1	15	2	15	2	15	2	15	2	15	2	15	2
nodo 5	$+\infty$	-1	29	2	27	3	27	3	23	6	23	6	23	6
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	20	4	20	4	20	4	20	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	34	6	30	5	30	5
insieme Q	2, 3		3, 4, 5		4, 5		5, 6		5, 7		7		\emptyset	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	7	(7, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 7, 0, 0)	7
1 - 2 - 4 - 6 - 7	2	(9, 0, 2, 7, 0, 0, 2, 7, 0, 2)	9
1 - 3 - 5 - 2 - 4 - 6 - 7	5	(9, 5, 7, 7, 5, 0, 7, 7, 0, 7)	14

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1\}$ $N_t = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$