Esame di Ricerca Operativa del 03/09/2015

(Cognome)	(Nome)	(Matricola)

Esercizio 1. Una raffineria di petrolio miscela 4 tipi di greggio per ottenere 3 tipi di carburante: senza piombo, diesel e blu diesel. La tabella seguente mostra la quantità disponibile ed il costo di ogni tipo di greggio:

Tipo di greggio	Barili disponibili	Costo (€/barile)
1	5000	45
2	2400	35
3	4000	60
4	1500	30

Il prezzo di vendita ed i requisiti tecnici di ogni carburante, in termini di minima e massima percentuale di ogni tipo di greggio, sono i seguenti:

Tipo di carburante	Greggio richiesto	Prezzo (€/barile)
senza piombo	almeno 20% di tipo 2 al più 30% di tipo 4	75
diesel	almeno 40% di tipo 3	68
blu diesel	al più 50% di tipo 1	72

La raffineria vuole trovare la composizione dei carburanti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\,x_1 - 9\,x_2 \\ x_2 \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 6 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{5, 6\}$	$x =$		
$\{3, 5\}$	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{1,2}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 12\ x_1 + 7\ x_2 \\ 8\ x_1 + 7\ x_2 \geq 52 \\ 6\ x_1 + 8\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $\qquad$ $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ $\qquad$ taglio:

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	12	20	19	7
2		18	28	11
3			16	14
4				27

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

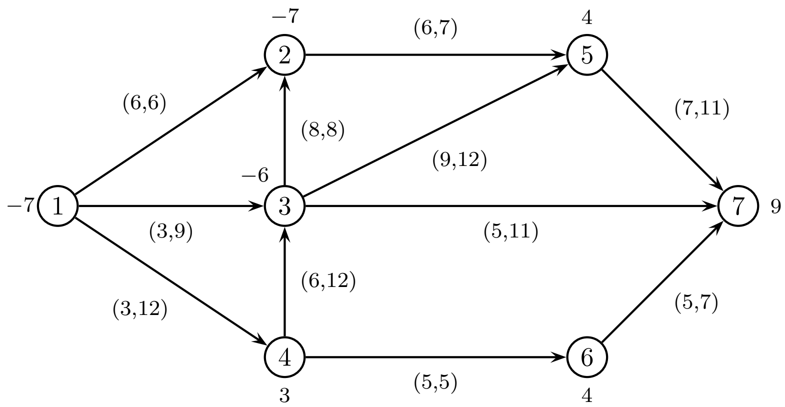
4–albero: $\qquad$ $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $\qquad$ $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{14}, x_{24}, x_{45}.

Esercizio 6. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

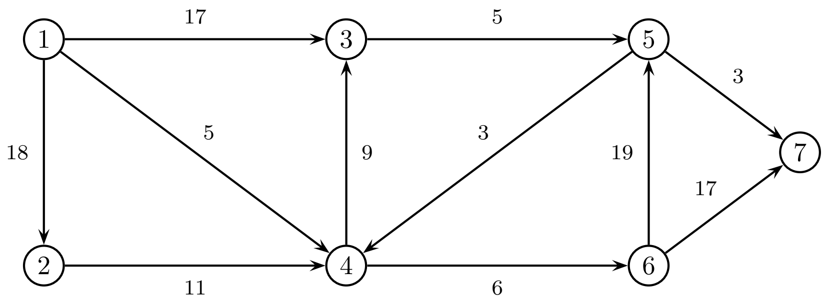


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(2,5)	$x =$		
(1,3) (1,4) (2,5) (3,2) (5,7) (6,7)	(4,6)	$\pi = (0,$		

Esercizio 7. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

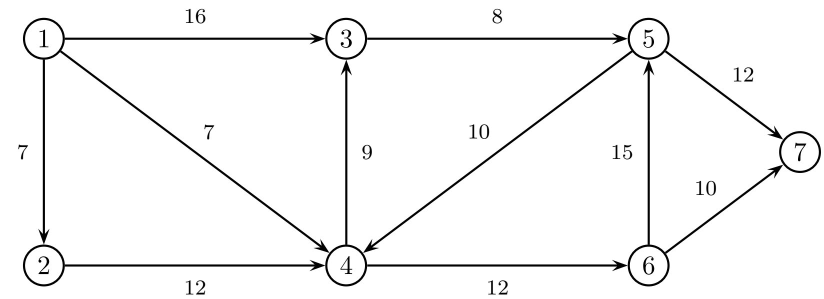
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 8. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

SOLUZIONI

Esercizio 1. Variabili decisionali: x_{ij} = barili di greggio di tipo i usati per produrre il carburante j
Modello:

$$\begin{cases} \max\ 75\,(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}) + 68\,(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}) + 72\,(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}) \\ \qquad -45\,(x_{11}+x_{12}+x_{13}) - 35\,(x_{21}+x_{22}+x_{23}) - 60\,(x_{31}+x_{32}+x_{33}) - 30\,(x_{41}+x_{42}+x_{43}) \\ x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 5000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 2400 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 4000 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43} \leq 1500 \\ x_{21} \geq 0.2\,(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}) \\ x_{41} \leq 0.3\,(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}) \\ x_{32} \geq 0.4\,(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}) \\ x_{13} \leq 0.5\,(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.

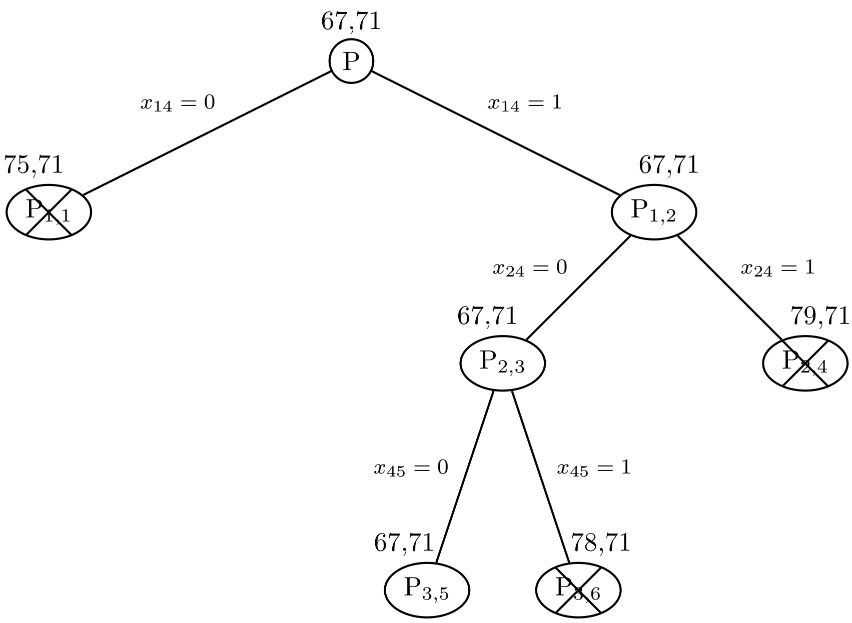
Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{5, 6\}$	$x = (6,\ -4)$	NO	SI
$\{3, 5\}$	$y = (0,\ 0,\ 8,\ 0,\ 17,\ 0)$	SI	NO

Esercizio 3.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{1, 2\}$	$(0,\ 0)$	$(-9,\ -8,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$	1	6, 4	5
2° iterazione	$\{2, 5\}$	$(0,\ -4)$	$(0,\ -8,\ 0,\ 0,\ 9,\ 0)$	2	6, 2, 6	4

Esercizio 4.
a) sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \dfrac{52}{7}\right)$ $\qquad v_I(P) = 52$
b) sol. ammissibile = $(0, 8)$ $\qquad v_S(P) = 56$
c)
$r = 2 \qquad 7\,x_1 + 6\,x_2 \geq 45$
$r = 4 \qquad 7\,x_1 + 6\,x_2 \geq 45$

Esercizio 5.
a) 4–albero: (1 , 4) (1 , 5) (2 , 5) (3 , 4) (3 , 5) $\qquad v_I(P) = 67$
b) ciclo: 2 – 5 – 1 – 4 – 3 $\qquad v_S(P) = 71$
c)



Esercizio 6.

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(2,5)	$x = (0,\ 0,\ 7,\ 7,\ 0,\ 0,\ 10,\ 4,\ 0,\ 3,\ -4)$	NO	SI
(1,3) (1,4) (2,5) (3,2) (5,7) (6,7)	(4,6)	$\pi = (0,\ 11,\ 3,\ 3,\ 17,\ 19,\ 24)$	NO	NO

Esercizio 7.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7)
Archi di U	(2,5)	
x	(0, 0, 7, 7, 0, 6, 0, 0, 4, 9, 0)	(0, 0, 7, 7, 0, 6, 0, 0, 4, 9, 0)
π	$(0,\ 6,\ -3,\ 3,\ 6,\ 8,\ 13)$	$(0,\ 0,\ -3,\ 3,\ 6,\ 8,\ 13)$
Arco entrante	(2,5)	(3,7)
ϑ^+, ϑ^-	1 , 0	11 , 6
Arco uscente	(1,2)	(3,5)

Esercizio 8.
a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		6		3		2		5		7	
nodo 2	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1
nodo 3	17	1	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4
nodo 4	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	30	6	19	3	19	3	19	3	19	3
nodo 6	$+\infty$	-1	11	4	11	4	11	4	11	4	11	4	11	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	28	6	28	6	28	6	22	5	22	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 3, 5, 7		2, 5, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	8	(0, 8, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 8, 0, 0)	8
1 - 4 - 6 - 7	7	(0, 8, 7, 0, 8, 0, 7, 0, 8, 0, 7)	15
1 - 2 - 4 - 6 - 7	3	(3, 8, 7, 3, 8, 0, 10, 0, 8, 0, 10)	18
1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7	2	(5, 8, 7, 5, 8, 0, 12, 0, 10, 2, 10)	20

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad N_t = \{5, 6, 7\}$