Esame di Ricerca Operativa del 16/06/2015

(Cognome)	(Nome)	(Matricola)

Esercizio 1. Una ditta produce vernici in tre diversi stabilimenti (Pisa, Cascina, Empoli) e le vende a tre imprese edili (A, B, C). Il costo di produzione delle vernici varia a causa della diversa efficienza produttiva degli stabilimenti: la produzione costa 9 euro/kg nello stabilimento di Pisa, 10.5 euro/kg in quello di Cascina e 10 euro/kg in quello di Empoli. Il costo (in euro) per spedire un kg di vernice da uno stabilimento ad un cliente è indicato nella seguente tabella:

	imprese edili		
stabilimento	A	B	C
Pisa	0.25	0.5	0.6
Cascina	0.3	0.2	0.1
Empoli	0.5	0.3	0.2

I tre stabilimenti possono produrre al massimo 8500, 9200 e 11000 kg di vernice all'anno. In base alle previsioni sulle vendite, la domanda annuale delle tre imprese edili è pari a 5000, 8300 e 6300 kg di vernice. Per bilanciare la produzione si richiede che la produzione nell'impianto con costo maggiore (quello di Cascina) sia almeno la metà della produzione nell'impianto di Pisa ed almeno un terzo della produzione nell'impianto di Empoli.

Determinare quanti kg di vernice deve produrre la ditta in ogni stabilimento in modo da minimizzare il costo totale.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 4\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{4, 5\}$	$x =$		
$\{2, 3\}$	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{1,3}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 7\ x_1 + 14\ x_2 \\ 9\ x_1 + 6\ x_2 \leq 50 \\ 7\ x_1 + 13\ x_2 \leq 42 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	30	35	32	25
2		28	33	26
3			24	16
4				12

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

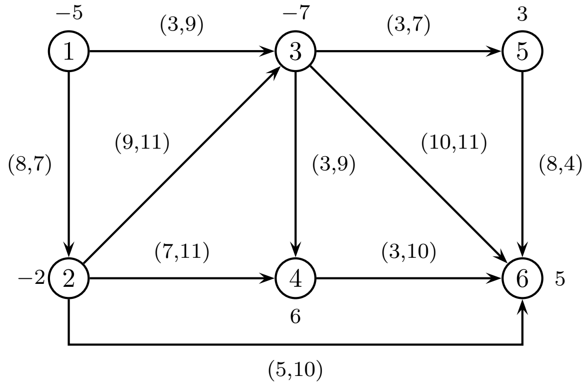
5–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{35}, x_{45}.

Esercizio 6. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

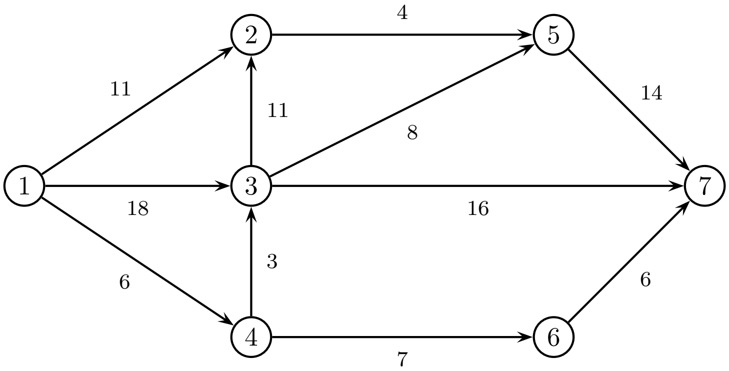


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,3) (3,4) (4,6) (5,6)	(2,6)	$x =$		
(1,2) (1,3) (3,6) (4,6) (5,6)	(3,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 7. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

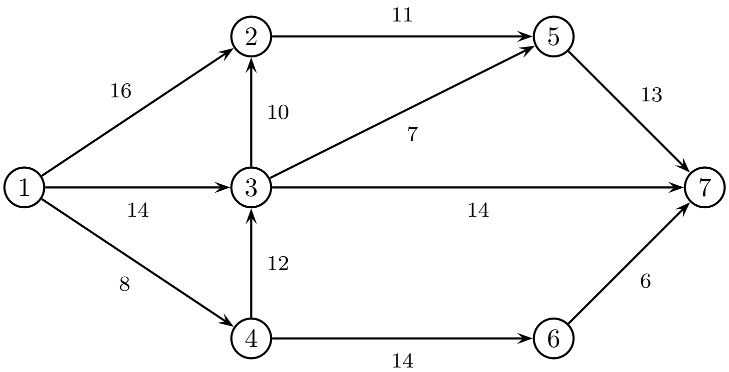
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,3) (3,4) (3,6) (5,6)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 8. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

SOLUZIONI

Esercizio 1. Variabili decisionali: numerati con 1, 2 e 3 gli stabilimenti di Pisa, Cascina ed Empoli rispettivamente, e numerati con 1, 2 e 3 i clienti, indichiamo con x_{ij} la quantità di vernice prodotta dall'impianto i per il cliente j.

Modello:

$$\begin{cases} \min\ 9.25\, x_{11} + 9.5\, x_{12} + 9.6\, x_{13} + 10.8\, x_{21} + 10.7\, x_{22} + 10.6\, x_{23} + 10.5\, x_{31} + 10.3\, x_{32} + 10.2\, x_{33} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 8500 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 9200 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 11000 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 5000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 8300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 6300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq (x_{11} + x_{12} + x_{13})/2 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq (x_{31} + x_{32} + x_{33})/3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{4,\ 5\}$	$x = (1,\ 2)$	SI	SI
$\{2,\ 3\}$	$y = (0,\ -5,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 3.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{1,\ 3\}$	$(-1,\ 1)$	$\left(-\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{3}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	1	2, 4, 3	4
2° iterazione	$\{3,\ 4\}$	$(0,\ 2)$	$(0,\ 0,\ -1,\ 5,\ 0,\ 0)$	3	1, 1	5

Esercizio 4.

a) sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \frac{42}{13}\right)$ $\qquad v_S(P) = 45$

b) sol. ammissibile $= (0, 3)$ $\qquad v_I(P) = 42$

c)

$r = 2 \qquad x_2 \leq 3$

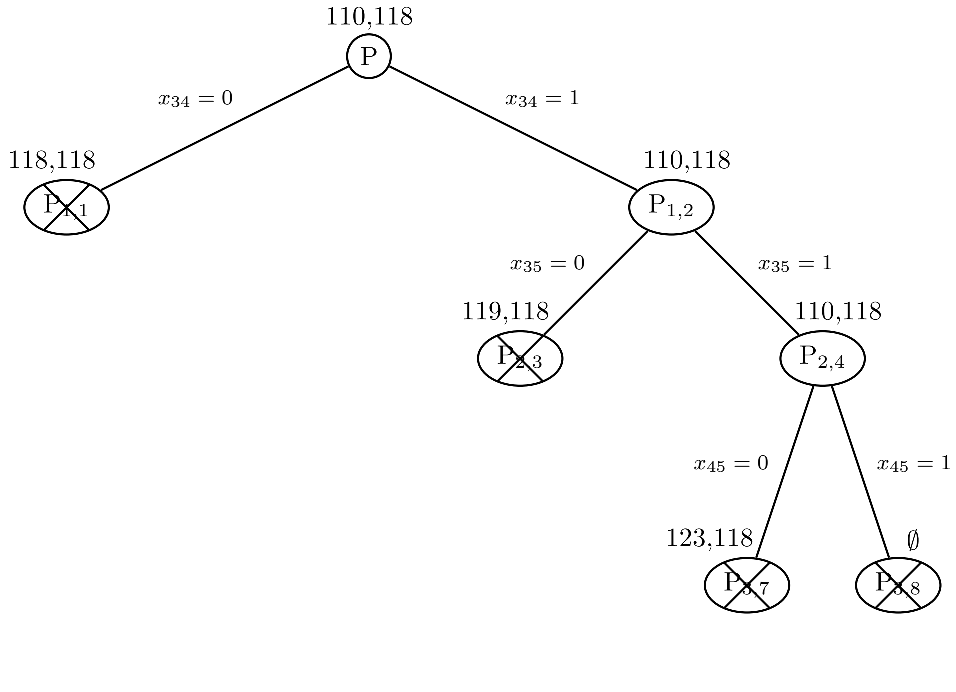
$r = 3 \qquad 3\,x_1 + 7\,x_2 \leq 22$

Esercizio 5.

a) 5–albero: (1 , 2) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 110$

b) ciclo: 4 – 5 – 3 – 2 – 1 $\qquad v_S(P) = 118$

c)



Esercizio 6.

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,3) (3,4) (4,6) (5,6)	(2,6)	$x = (5,\ 0,\ -3,\ 0,\ 10,\ 4,\ 0,\ 0,\ -2,\ -3)$	NO	NO
(1,2) (1,3) (3,6) (4,6) (5,6)	(3,4)	$\pi = (0,\ 8,\ 3,\ 10,\ 5,\ 13)$	SI	SI

Esercizio 7.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,3) (3,4) (3,6) (5,6)	(1,3) (2,3) (3,4) (3,6) (5,6)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(5, 0, 7, 0, 0, 6, 7, 1, 0, 4)	(0, 5, 2, 0, 0, 6, 7, 1, 0, 4)
π	(0, 8, 17, 20, 19, 27)	$(0,\ -6,\ 3,\ 6,\ 5,\ 13)$
Arco entrante	(1,3)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 5	11 , 2
Arco uscente	(1,2)	(2,3)

Esercizio 8.
a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		3		2		6		5		7	
nodo 2	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1
nodo 3	18	1	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4
nodo 4	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	17	3	15	2	15	2	15	2	15	2
nodo 6	$+\infty$	-1	13	4	13	4	13	4	13	4	13	4	13	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	25	3	25	3	19	6	19	6	19	6
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 5, 6, 7		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	14	(0, 14, 0, 0, 0, 0, 14, 0, 0, 0, 0)	14
1 - 2 - 5 - 7	11	(11, 14, 0, 11, 0, 0, 14, 0, 0, 11, 0)	25
1 - 4 - 6 - 7	6	(11, 14, 6, 11, 0, 0, 14, 0, 6, 11, 6)	31
1 - 4 - 3 - 5 - 7	2	(11, 14, 8, 11, 0, 2, 14, 2, 6, 13, 6)	33

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2\}$ $N_t = \{3, 4, 5, 6, 7\}$