Esame di Ricerca Operativa del 11/02/2015

(Cognome)	(Nome)	(Matricola)

Esercizio 1. Un'azienda produce 4 tipi di TV (32, 40, 50 e 55 pollici) ed è divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 operai in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre i TV e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

TV	32"	40"	50"	55"
Stabilimento A	1.2	1.5	1.7	2
Stabilimento B	1.5	1.6	1.8	2.1
Richiesta	1000	700	600	400

Sapendo che i 4 tipi di TV vengono venduti rispettivamente a 400, 600, 1000, e 1500 euro, l'azienda vuole determinare quanti TV di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 5\ y_1 + 12\ y_3 + 12\ y_4 - 2\ y_5 + 5\ y_6 \\ -y_1 - 2\ y_3 - y_4 + y_5 - y_6 = -3 \\ -y_2 + y_3 + 2\ y_4 - y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{4, 5}	$x =$		
{2, 3}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{4,6}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \\ 14\ x_1 + 5\ x_2 \geq 49 \\ 12\ x_1 + 19\ x_2 \geq 53 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	20	31	24	12
2		28	29	8
3			26	21
4				22

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

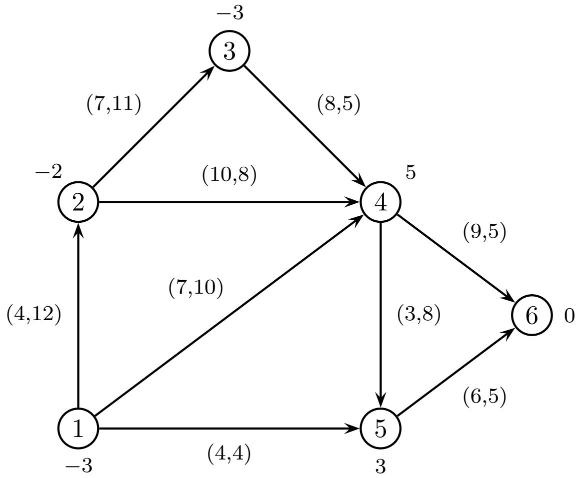
5–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{12}, x_{15}, x_{25}.

Esercizio 6. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

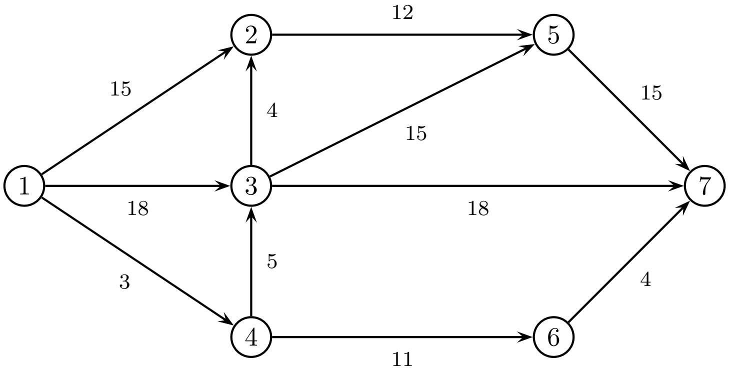


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,5) (2,3) (4,5) (4,6)	(3,4)	$x =$		
(1,2) (2,3) (3,4) (4,5) (4,6)	(2,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 7. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

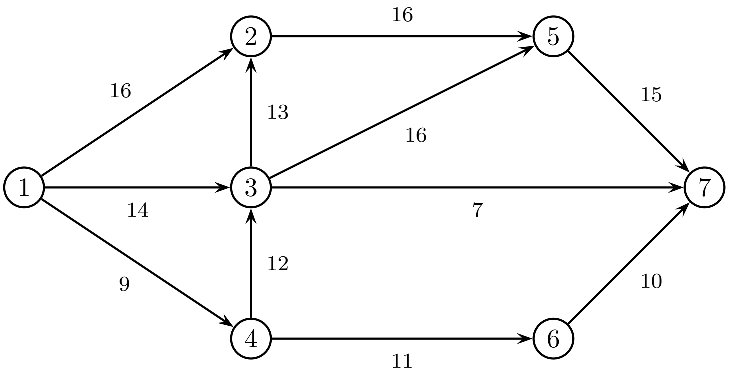
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,5) (2,3) (4,6) (5,6)	
Archi di U	(3,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 8. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $\qquad$ $N_t =$

SOLUZIONI

Esercizio 1.
variabili decisionali: x_{ij} = numero di TV di tipo i prodotti nello stabilimento j, con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = A, B$.

modello:

$$\begin{cases} \max\ 400\,(x_{1A}+x_{1B}) + 600\,(x_{2A}+x_{2B}) + 1000\,(x_{3A}+x_{3B}) + 1500\,(x_{4A}+x_{4B}) \\ 1.2\,x_{1A} + 1.5\,x_{2A} + 1.7\,x_{3A} + 2\,x_{4A} \leq 1600 \\ 1.5\,x_{1B} + 1.6\,x_{2B} + 1.8\,x_{3B} + 2.1\,x_{4B} \leq 2000 \\ x_{1A}+x_{1B} \geq 1000 \\ x_{2A}+x_{2B} \geq 700 \\ x_{3A}+x_{3B} \geq 600 \\ x_{4A}+x_{4B} \geq 400 \\ x_{ij} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Esercizio 2.

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{4,\ 5\}$	$x = (-2,\ 5)$	SI	NO
$\{2,\ 3\}$	$y = \left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	SI	NO

Esercizio 3.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{4,\ 6\}$	$\left(-\frac{22}{3},\ \frac{7}{3}\right)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{4}{3},\ 0,\ \frac{5}{3}\right)$	1	$4,\ \frac{5}{2}$	6
2° iterazione	$\{1,\ 4\}$	$\left(-5,\ \frac{7}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$	3	$\frac{5}{3},\ 1$	4

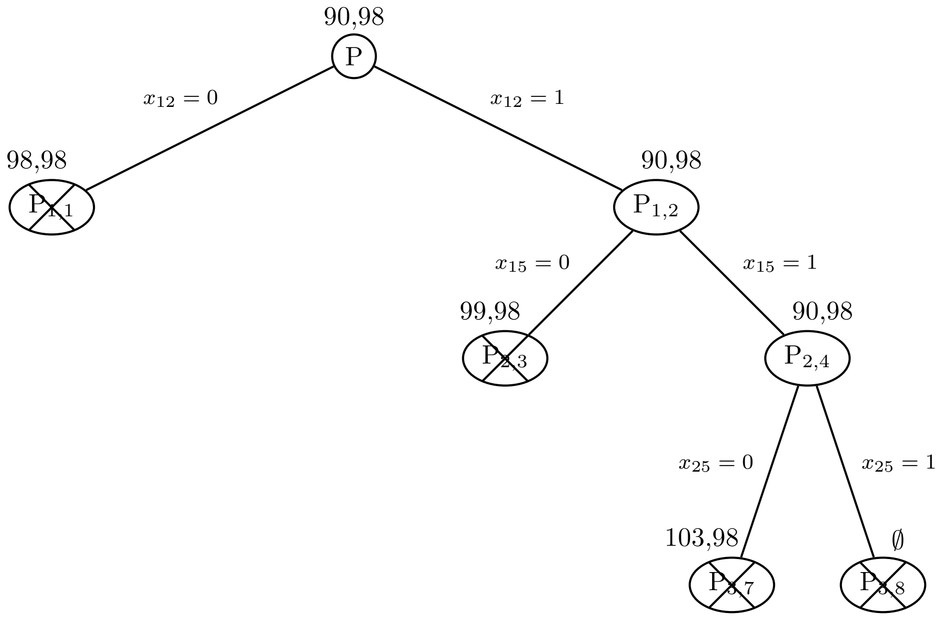
Esercizio 4.
a) sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{53}{12}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 23$
b) sol. ammissibile $= (5, 0)$ $\qquad v_S(P) = 25$
c)
$r = 1 \qquad 11\,x_1 + 18\,x_2 \geq 49$
$r = 3 \qquad 10\,x_1 + 16\,x_2 \geq 45$

Esercizio 5.

a) 5–albero: (1 , 2) (1 , 4) (1 , 5) (2 , 5) (3 , 4) $\qquad v_I(P) = 90$

b) ciclo: $2 - 5 - 1 - 4 - 3 \qquad v_S(P) = 98$

c)



Il ciclo $2 - 5 - 1 - 4 - 3$ è ottimo.

Esercizio 6.

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,5) (2,3) (4,5) (4,6)	(3,4)	$x = (0,\ 0,\ 3,\ 2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 0,\ 0)$	SI	SI
(1,2) (2,3) (3,4) (4,5) (4,6)	(2,4)	$\pi = (0,\ 4,\ 11,\ 19,\ 22,\ 28)$	NO	SI

Esercizio 7.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,5) (2,3) (4,6) (5,6)	(1,5) (2,3) (3,4) (4,6) (5,6)
Archi di U	(3,4)	
x	(0, 0, 3, 2, 0, 5, 0, 0, 0)	(0, 0, 3, 2, 0, 5, 0, 0, 0)
π	(0, 4, 11, 1, 4, 10)	(0, −14, −7, 1, 4, 10)
Arco entrante	(3,4)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	1 , 0	8 , 2
Arco uscente	(1,2)	(2,3)

Esercizio 8.

a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		3		2		6		7		5	
nodo 2	15	1	15	1	12	3	12	3	12	3	12	3	12	3
nodo 3	18	1	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
nodo 4	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	3	23	3	23	3	23	3	23	3
nodo 6	$+\infty$	-1	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	3	26	3	18	6	18	6	18	6
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 5, 6, 7		5, 6, 7		5, 7		5		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	7	(0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0)	7
1 - 2 - 5 - 7	15	(15, 7, 0, 15, 0, 0, 7, 0, 0, 15, 0)	22
1 - 4 - 6 - 7	9	(15, 7, 9, 15, 0, 0, 7, 0, 9, 15, 9)	31

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$